# Kapitel 2

# Zahlen und Gleichungen

## 2.1 Reelle Zahlen

Die Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen setzt sich zusammen aus den rationalen und den irrationalen Zahlen. Die Mengen der natürlichen Zahlen $\mathbf{N}$, der ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$ und der rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$,

$$\begin{array}{rl} \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} & \text{Natürliche Zahlen} \\ \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\} & \text{Ganze Zahlen} \\ \mathbf{Q} = \{p/q;\ p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\} & \text{Rationale Zahlen} \end{array}$$

sind jeweils Untermengen gemäß

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Grundlegende Regeln der Algebra:

$$\begin{array}{rclcrclrcll} a+b &=& b+a & & & & & a \cdot b &=& b \cdot a & \text{Kommutativgesetz} \\ a+(b+c) &=& (a+b)+c & & & & & a \cdot (b \cdot c) &=& (a \cdot b) \cdot c & \text{Assoziativgesetz} \\ & & & a \cdot (b+c) &=& a \cdot b + a \cdot c & & & & & \text{Distributivgesetz} \\ a+0 &=& a & & & & & a \cdot 1 &=& a & \end{array}$$

Jede der vier Grundrechungsarten kann in $\mathbf{Q}$ unbeschränkt ausgeführt werden (Ausnahme: Division durch Null), keine führt aus dem Bereich der rationalen Zahlen heraus. Jede rationale Zahl kann auf der Zahlengeraden dargestellt werden. Umgekehrt kann jedoch nicht jede Strecke auf der Zahlengeraden durch eine rationale Zahl dargestellt werden, z.B. ist $\sqrt{2}$ (= Diagonale im Quadrat der Seitenlänge 1) keine rationale Zahl. Um jede Strecke auf der Zahlengeraden durch eine Zahl darstellen zu können, muß die Menge der rationalen Zahlen um die irrationalen Zahlen zur Menge der reellen Zahlen erweitert werden.

Die reellen Zahlen können mit den Punkten auf der unendlichen Zahlengeraden identifiziert werden. Die grundlegenden Regeln der Algebra gelten auch für die reellen Zahlen. Jede nicht leere und nach oben (unten) beschränkte Teilmenge $S$ von $\mathbf{R}$ besitzt in $\mathbf{R}$ eine kleinste obere (größte untere) Schranke.

**Schranken.** $M$ heißt obere Schranke für eine beliebige Zahlenmenge $S$, wenn kein Element aus $S$ größer ist als $M$. Existiert eine solche Schranke, heißt die Menge $S$ nach oben beschränkt (analog: untere Schranke, nach unten beschränkt). Für eine nach oben (unten) beschränkte Menge von rationalen Zahlen gibt es nicht immer eine rationale Zahl als kleinste obere (größte untere) Schranke. Beispiel ist die Menge aller rationalen Zahlen, deren Quadrat kleiner als 2 ist. Jede irrationale Zahl kann jedoch beliebig genau durch rationale Zahlen angenähert werden, z.B. durch Dezimalzahlen.

Anordnungspostulate für reelle Zahlen:

1. Für jedes $x$ gilt eine der folgenden Aussagen: $x < 0$ oder $x > 0$ oder $x = 0$.

2. Für $x$, $y$ gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $y - x \geq 0$ ist.

3. Für $x$, $y$ gilt: ist $x \geq 0$ und $y \geq 0$, so ist auch $x + y \geq 0$ und $x \cdot y \geq 0$.

## 2.2 Komplexe Zahlen

Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ haben in der Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen keine Lösung. Formal läßt sich durch Einführung der Größe $i$ ($i =$ imaginäre Einheit) mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

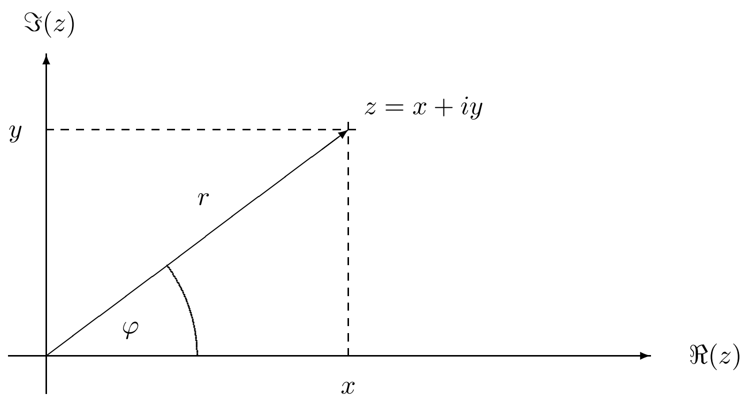
eine Lösung für die obige Gleichung und analoge Gleichungen definieren.
Definition der komplexen Zahlen:

$$z = x + i\,y = (x, y) \qquad\qquad \mathbf{C} = \{x + i\,y;\; x, y \in \mathbf{R}\}.$$

$x = \Re(z)$ heißt Realteil von $z$, und $y = \Im(z)$ heißt Imaginärteil von $z$. Komplexe Zahlen $z$ lassen sich durch ein reelles Zahlenpaar festlegen und in der Gaußschen Zahlenebene mit einer reellen Achse und einer dazu senkrechten imaginären Achse veranschaulichen. Komplexe Zahlen $z$ mit $\Re(z) = 0$ heißen rein imaginär. Zwei komplexe Zahlen heißen zueinander konjugiert komplex, wenn ihre Realteile gleich und ihre Imaginärteile dem Betrage nach gleich sind, jedoch verschiedene Vorzeichen haben. Die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl $x - iy$ wird mit $z^*$ bezeichnet. Der Betrag einer komplexen Zahl ist

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z^* z}$$

und ist in der komplexen Zahlenebene ein Maß für die Länge der Strecke vom Nullpunkt zum Punkt $z$.




Neben der Darstellung durch Real- und Imaginärteil in der algebraischen Schreibweise $z = x + iy$ wird auch die trigonometrische Schreibweise

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

mit dem Betrag $|z| = r$ und dem Argument $\varphi$ benutzt:

$$\begin{aligned} \text{Betrag von } z &= |z| = r \\ \text{Argument von } z &= \varphi = \arg z = \arcsin y/r = \arccos x/r = \arctan y/x \end{aligned}$$

Für $z = 0$ ist das Argument $\arg z$ unbestimmt. Für den Hauptwert des Arguments gilt: $-\pi < \varphi \leq \pi$. Ungleichungen wie $z_1 < z_2$ haben für komplexe Zahlen $z_1$ und $z_2$ keinen Sinn, verglichen werden können jedoch Beträge komplexer Zahlen. Es gilt die Dreiecksungleichung:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

**Rechenregeln für komplexe Zahlen**

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad\qquad z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Addition und Subtraktion:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\
&= r_1r_2\big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big] \\
&= r_1r_2\big[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big] \\
|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \qquad\qquad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2
\end{aligned}$$

Inverse komplexe Zahlen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_2} &= \frac{1 + i\,0}{x_2 + iy_2} = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\
\frac{1}{z_2} &= \frac{1}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{1}{r_2}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) \\
\left|\frac{1}{z_2}\right| &= \frac{1}{|z_2|} \qquad\qquad \arg(\frac{1}{z_2}) = -\arg z_2
\end{aligned}$$

Division:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\big[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big] \\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2} \qquad\qquad \arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2
\end{aligned}$$

**Komplexe Exponentialfunktion**

$$\begin{aligned}
e^z &= e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \\
e^{iy} &= \cos y + i\sin y \quad \text{Eulersche Formel} \\
|e^z| &= e^x = e^{\Re(z)} \quad \arg e^z = y = \Im(z)
\end{aligned}$$

Aus der Eulerschen Formel folgt die Moivre-Formel:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit der Periode $i2\pi$ und kann zur Darstellung der reellen Cosinus- und Sinus-Funktionen benutzt werden:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \qquad\qquad e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad\qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

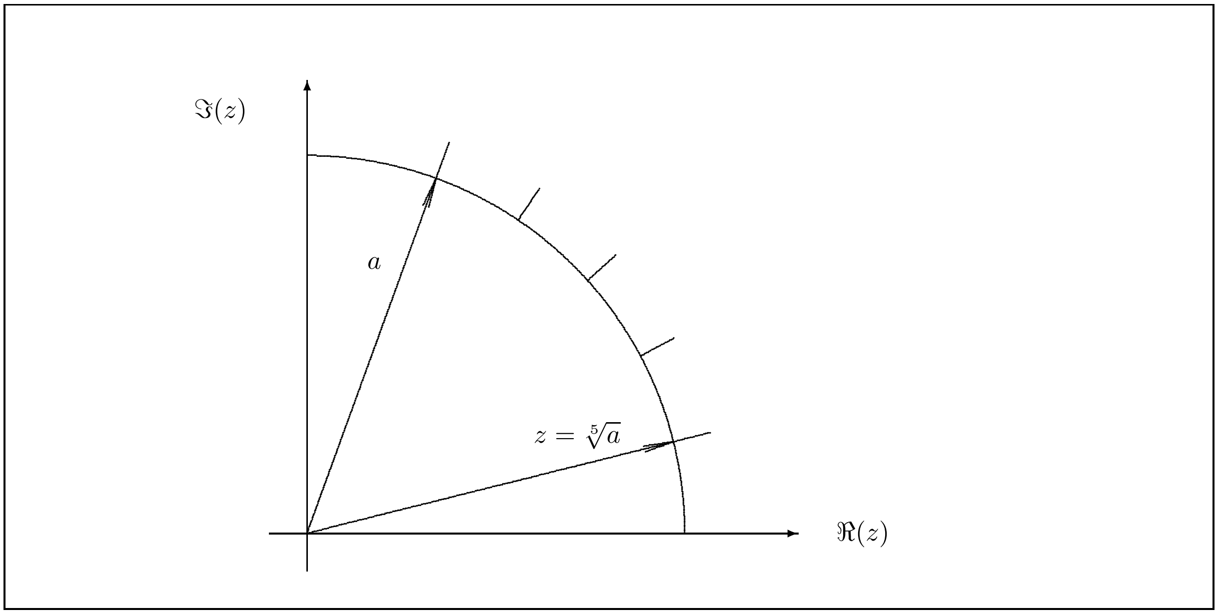
## 2.3 Gleichungen n-ten Grades

Gleichungen der Form

$$z^n = a$$

können für komplexe und reelle Werte $a$ gelöst werden. Es gibt genau $n$ Lösungen; diese heißen $n$-te Wurzeln von $a$, geschrieben $\sqrt[n]{a}$. Die Lösungen basieren auf der Moivre-Formel (siehe oben). Wird $a$ dargestellt in der trigonometrischen Schreibweise mit Betrag $r$ und Argument $\varphi$, also $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so ist

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\big[\cos(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n})\big] \quad k = 0,\, 1,\, \ldots\, (n-1)$$




**Quadratische Gleichungen**

Die Anzahl reeller Lösungen (Wurzeln) einer quadratischen Gleichung

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

hängt vom Wert der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ ab:

$$D \begin{cases} > & 0 \quad \text{zwei reelle Lösungen} \\ = & 0 \quad \text{eine reelle Lösung (Doppelwurzel)} \\ < & 0 \quad \text{keine reelle Lösung} \end{cases}$$

Lösungsformel für $D \geq 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{D}}.$$

Die Eigenschaften

$$x_1 + x_2 = -b/a \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = c/a$$

folgen aus dem Vergleich mit der Darstellung $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Für negative Werte von D erhält man zwei komplexe Lösungen, indem man in der Lösungsformel $\sqrt{D}$ durch $i\sqrt{-D}$ ersetzt.

**Gleichungen höheren Grades**

Gleichungen $n$-ten Grades der Form

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

haben allgemein genau $n$ reelle oder komplexe Lösungen, wobei $k$-fache Lösungen $k$-fach gezählt werden. Sind $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Wurzeln und $k, l, m \ldots$ die Vielfachheiten, so ist

$$P(x) = a_n (x - \alpha)^k (x - \beta)^l (x - \gamma)^m \ldots .$$

Für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ gibt es noch Formeln für die Berechnung der Wurzeln, die jedoch recht kompliziert sind. Allgemein können numerische Verfahren angewendet werden (s. Kap. 2.5).

## 2.4 Determinanten und lineare Gleichungssysteme

### Determinanten

Die Determinante n-ter Ordnung ist eine Zahl D, die sich aus den $n^2$ Zahlen einer Anordnung aus $n$ Zeilen und $n$ Spalten ergibt.

$$D = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Eigenschaften der Determinante:

1. Die Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man in ihr die Zeilen mit den Spalten vertauscht (die folgenden Eigenschaften gelten daher auch für Spalten).

2. Die Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen vertauscht, und hat den Wert 0, wenn zwei Zeilen gleich oder einander proportional sind, oder wenn eine Zeile die Linearkombination anderer Zeilen ist. Addiert man zu einer Zeile die Elemente einer anderen Zeile, bleibt der Wert der Determinante ungeändert.

3. Ein allen Elementen einer Zeile gemeinsamer Faktor kann vor die Determinante gezogen werden.

Berechnung der Determinante:

$$D = |a_{ij}| = \sum_{\text{Perm}} (-1)^k a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

wobei sich die Summe über alle $n!$ Permutationen $j_1,\, j_2 \dots j_n$ der Zahlen $1,\, 2 \dots n$ erstreckt; das Vorzeichen $(-1)^k$ ergibt sich aus der Anzahl $k$ der Inversionen in der Permutation. Speziell gilt:

$$|a_{11}| = a_{11} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Die Unterdeterminante des Elements $a_{ij}$ ist die Determinate $(n-1)$-ter Ordnung, die sich durch Streichen der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte ergibt. Das algebraische Komplement $A_{ij}$ des Elements $a_{ij}$ ist die mit dem Faktor $(-1)^{i+j}$ multiplizierte Unterdeterminante des Elements $a_{ij}$. Allgemein kann eine Determinate $n$-ter Ordnung durch Determinanten $(n-1)$ter Ordung ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad & i = 1, \dots n \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad & j = 1, \dots n \end{aligned}$$

### Lineare Gleichungssysteme

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit $n$ Gleichungen für $n$ Unbekannte $x_1, x_2, \dots x_n$

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

kann mit Hilfe von Determinanten bestimmt werden. Der Rechenaufwand wird für größere $n$ $(n > 3)$ sehr groß und es sollten dann andere Verfahren benutzt werden. $D = |a_{ij}|$ heißt Koeffizientendeterminante des Systems,

$D_j$ ist die Determinante, die sich ergibt, wenn die Spalte $j$ der Koeffizienten $a_{ij}$ durch die Spalte der $b_i$ ersetzt wird, z.B.

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wenn wenigstens ein $b_i$ von 0 verschieden ist, heißt das System inhomogen. Wenn die Koeffizientendeterminante des Systems ungleich 0 ist, hat das System genau eine Lösung. Die Werte $x_i$ ergeben sich nach der Formel (Kramersche Regel)

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad \dots \quad x_n = \frac{D_n}{D}\,.$$

Ist $D$ gleich 0 und sind nicht alle $D_i$ gleich 0, so ist das System unlösbar (Widerspruch in den Gleichungen). Wenn alle $b_i = 0$ sind, heißt das System homogen. Damit ein homogenes System außer der trivialen Lösung $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots x_n = 0$ noch weitere Lösungen besitzt, muß gelten: $D = 0$. Auch alle Linearkombinationen sind Lösungen des Systems.

## 2.5 Numerische Methoden zur Lösung von Gleichungen

Nullstellen von Funktionen $f(x)$, d.h. Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ können allgemein mit numerischen Methoden bestimmt werden. Angenäherte Lösungen lassen sich graphisch oder durch Probieren ermitteln.

### Regula falsi

Ist die Funktion $f(x)$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so liegt zwischen $a$ und $b$ mindestens eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Mit der Regula falsi genannten Methode der linearen Interpolation

$$\tilde{x} = a - f(a)\frac{a-b}{f(a)-f(b)}$$

läßt sich ein Näherungswert $\tilde{x}$ berechnen. Dieser kann je nach Vorzeichen von $f(\tilde{x})$ einen der beiden Werte $a$ oder $b$ ersetzen und bei erneuter Anwendung der Formel einen besseren Schätzwert liefern. Die Werte $a$ und $b$ stellen Schranken für die Lösung dar, die beliebig eng gemacht werden können.

### Iterationsverfahren

Es sei $x_0$ ein Näherungswert für eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Nach Umstellen der Gleichung auf die Form $x = g(x)$ lassen sich durch mehrfache Anwendung der Formel

$$x_{j+1} = g(x_j) \qquad j = 0,\, 1,\, \dots$$

aus einem Näherunswert $x_0$ iterativ genauere Näherungswerte gewinnen; das Verfahren führt zur Lösung (konvergiert gegen die Wurzel), wenn zwischen der Wurzel und dem ersten Näherungswert $x_0$ die Bedingung $|g'(x)| < 1$ gilt. Oft läßt sich diese Bedingung durch Umstellen erreichen.

### Newton-Verfahren

Ein allgemeines Iterationsverfahren für differenzierbare Funktionen ist das Newton-Verfahren:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x)|_{x_j}}{f'(x)|_{x_j}} \qquad j = 0,\, 1,\, \dots$$

Die Formel beruht auf der Näherung der Funktion durch eine Gerade durch den Punkt $\big(x_j, f(x_j)\big)$ mit der Steigung der Tangente. Das Verfahren konvergiert bei einfachen Wurzeln, wenn der erste Näherungswert $x_0$ nahe bei der Wurzel liegt.