Experimentelle Physik I
WS 16/17

Veranstaltung 4010011
https://campus.studium.kit.edu/event/H7Ke2neVDU6OCIWVcuIqYw

PD Dr. Andreas B. Meyer (KIT und DESY)

7. Vorlesung: 2.3 Arbeit und Energie (1)

Karlsruher Institut für Technologie

10. November 2016

Zusammenfassung

2.2.3 Zeitabhängige Kräfte: harmonischer Oszillator

- Hookesches Gesetz: $\vec{F} = -k\vec{x}$
- Bewegungsglg.: $\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{k}{m}x(t)$ DGL. 2.Ord.

$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ Ansatz

Randbed. $\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$ Randbed. Koeffizient

2.2.4 Rotationsdynamik

- Diskussion: Zentripetalkraft u. Bezugssysteme

2.2.5 Reibung

$f_H = \mu_H F_N$

$f_G = \mu_G \cdot F_G$

$\mu_G < \mu_H$

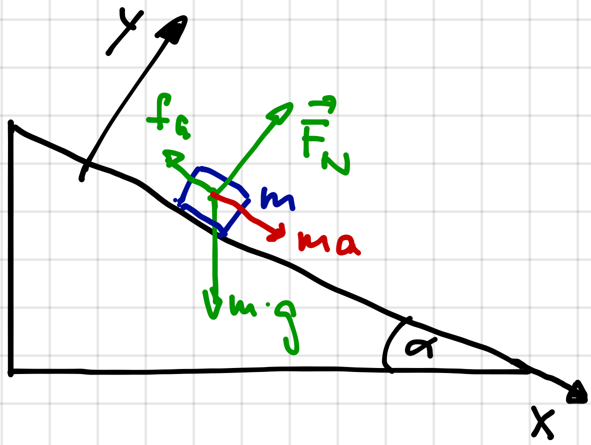
→ Versuche auf schiefer Ebene

→ Bestimmung des Haftreibungskoeffizienten μ_H

2.2.5 Reibung (Forts.)

Gleiche Rechnung wie in Vorl. 06 Seite 8,
jedoch in geschickter gewaehltem Koord.-System.
Hier: Geschwindigkeit in positiver x-Richtung

c) Allgemeiner Fall: Klotz gleitet



$$\vec{F}_N + \vec{f}_G + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$f_G = F_N \cdot \mu_G$$

$$F_N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$x: \ -\mu_G \cdot \cancel{m} \cdot g \cdot \cos\alpha + \cancel{m} \cdot g \cdot \sin\alpha = \cancel{m} \cdot a$$

$$y: \ F_N - mg\cos\alpha = 0$$

x-Komponente: $a = g \cdot (\sin\alpha - \mu_G \cdot \cos\alpha)$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

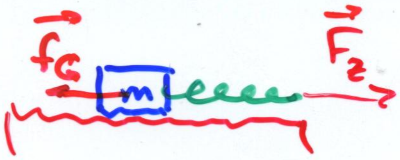
$\mu_G = \tan\alpha \Rightarrow a = 0 \Rightarrow v$ const.

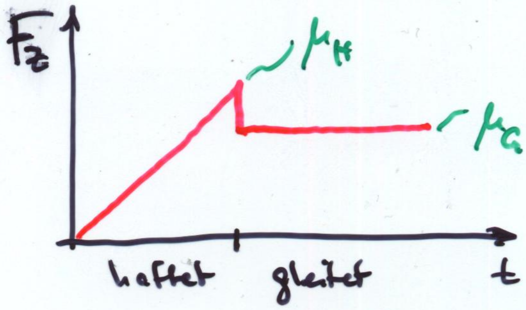
$\mu_G > \tan\alpha \Rightarrow a < 0 \Rightarrow$ Bremsung

$\mu_G < \tan\alpha \Rightarrow a > 0 \Rightarrow$ Beschleunigung

2.2.5 Reibung (Forts.)

d)





- f_G^{Klotz} (gemessen) $= \sim 3\ N$ $\qquad \mu_G < \mu_H$
- μ_G unabhängig von v ↯
- $f_G \propto F_N$, $f_G^{2 Klötze}$ (gemessen) $= \sim 6\ N$ ✓
- f_G unabhängig von Auflagefläche ✓
- f_G abh. von Oberflächenbeschaffenheit ✓

$\boxed{\text{Aufwenden der Kraft } F \text{ über eine Distanz } \Delta x \;\Rightarrow\; \text{Arbeit}}$

2.3. Arbeit und Energie

2.3.1. Arbeit

Beispiele:

- Überwinden von Reibung
- Dehnung einer elastischen Feder
- Klettern auf Stufe

Allgemein:

$$\boxed{\underbrace{\Delta A}_{\text{Skalar}} = \underbrace{\vec{F}(\vec{r})}_{\text{Kraftfeld}} \underbrace{\cdot}_{\text{Skalarprodukt}} \overbrace{\Delta \vec{r}}^{\text{Wegelement}}}$$

Mathem. Einschub

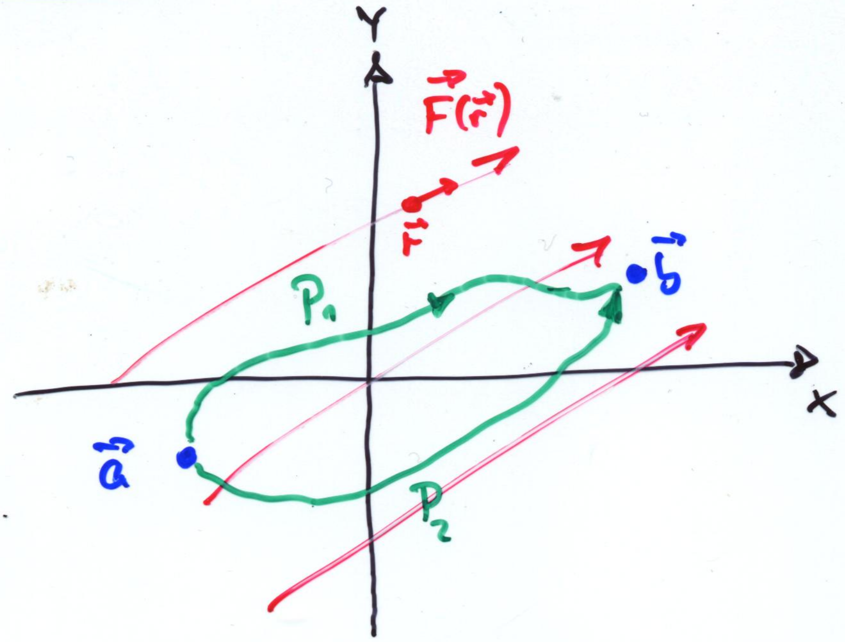
Großmann S.116

- Feld $\vec{F}(\vec{r})$ ordnet Punkten im Raum eine oder mehrere Zahlen zu
- Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

"Projektion"

Großmann S.35

Kraftfeld



Definition: Kraftfeld heißt Konservativ, wenn

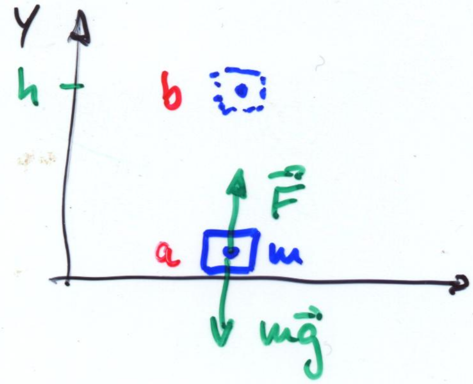
$$A_{\vec{a}\to\vec{b}} = \int_{\vec{a}, P_1}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{a}, P_2}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{b}, P_2}^{\vec{a}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{A_{\vec{a}\to\vec{a}} = \oint \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0}$$

In Konservative Kraftfeldern ist die Arbeit wegunabhängig

Beispiele

a) homogenes Gravitationsfeld



$$A = \int_a^b \vec F \cdot d\vec r = \int_a^b \underbrace{-m\vec g}_{\text{Konst.}} \cdot d\vec r$$

$$A_{ab} = |-m\vec g|\,|\vec b - \vec a| \cdot \underbrace{\cos \sphericalangle(\vec F, \vec b - \vec a)}_{1}$$

$$A_{ab} = mg \cdot (b-a)$$

$$A_{ba} = |-m\vec g| \cdot |\vec a - \vec b| \cdot \underbrace{\cos \sphericalangle(\vec F, \vec a - \vec b)}_{-1}$$

$$= -mg \cdot (b-a)$$

$$A_{ba} + A_{ab} = 0$$

$$\boxed{A_{ab} = -A_{ba}}$$

Kraftfeld ist **konservativ**

Klettern auf Stufe: $A = m \cdot g \cdot h$

Für $h = 0{,}5\,m$, $m = 100\,kg$:

$$A = 0{,}5\,m \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 100\,kg$$

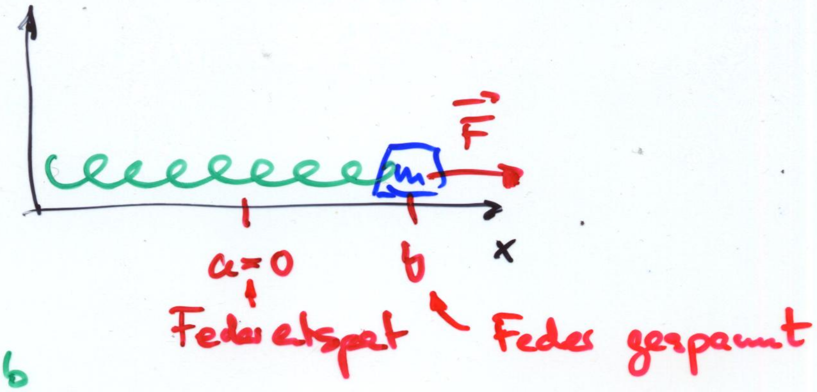
$$= 490{,}5\,\underbrace{kg\,m^2 s^{-2}}_{Nm = J = Ws}$$

20 W Glühbirne leuchtet 25 Sekunden

⇒ Versuch Flaschenzug: Demonstration

$$\boxed{A = F \cdot s}$$

b) Federkraft



$$A_{ab} = \int_a^b kx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}k\left(b^2 - a^2\right)$$

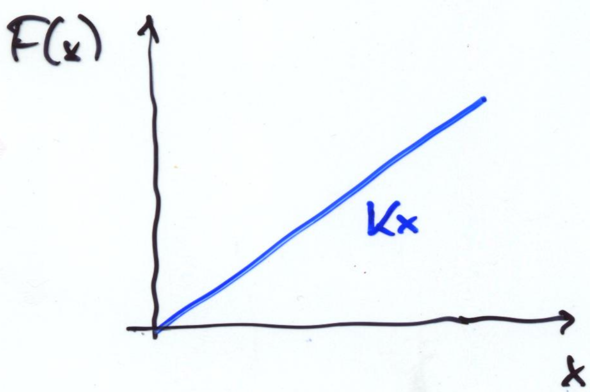
$$A_{ba} = \int_b^a kx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}k\left(a^2 - b^2\right) = -A_{ab}$$

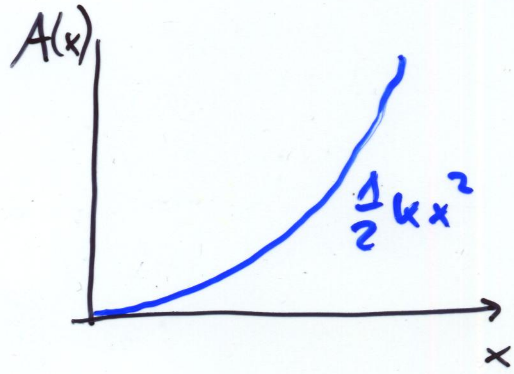
$$\boxed{A_{ba} = A_{ab}}$$

Konservativ

(im elastischen Bereich)

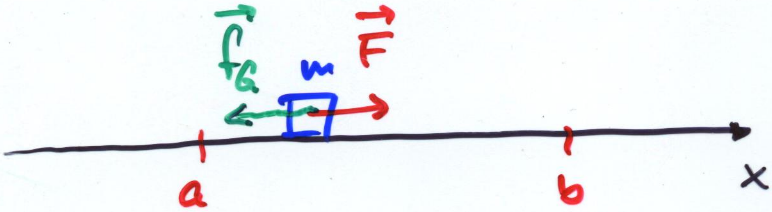


Kraft $\propto x$



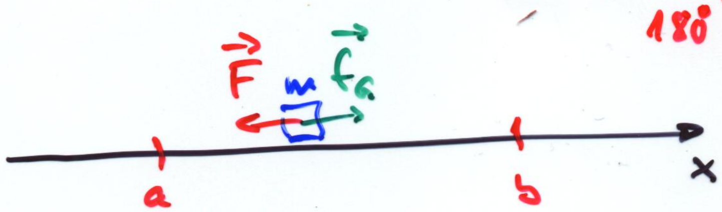
Arbeit (pot. Energie) $\propto x^2$

c) Reibung



Hin: $$A_{ab} = \int_a^b \vec F \cdot d\vec r = \int_a^b -\vec f_G \cdot d\vec r = -(-f_G)\cdot(b-a) = f_G \cdot (b-a)$$

$F(\vec r) = -f_G$ Skalarprodukt da $\vec f_G$ und $d\vec r$ 180° Winkel $f_G(x) = \text{const}$



Zurück: $$A_{ba} = \int_b^a \vec F \cdot d\vec r = \int_b^a -\vec f_G \cdot d\vec r = -f_G \cdot (a-b) = f_G \cdot (b-a)$$

$$\boxed{A_{ab} = A_{ba} \neq 0}$$

nicht konservativ!

Allgemeine Definitionen für Konservative Kraftfelder

① $\vec{F}(\vec{r})$ ist Konservativ, wenn $\exists$ skalare Funktion $V(\vec{r})$, so dass:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})} \qquad \vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Nabla-Operator

Potential für Einheitsladung

Großmann S. 199

$$A_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r}$$

$$= -\int_a^b \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} V(\vec{r}) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Wegunabhängigkeit

$$= -\int_{a_x}^{b_x} \frac{\partial}{\partial x} V(\vec{r}) \cdot dx - \int \dots$$

$$= -V(\vec{r})\Big|_{a_x}^{b_x} - \dots = -V(b_x) + V(a_x) - \dots$$

② $\vec{F}(\vec{r})$ ist Konservativ, wenn: $\underbrace{\vec{\nabla}\times}_{\text{Rotation}} \vec{F} = 0$

wirbelfrei

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} \equiv \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\times(-\vec{\nabla} V(\vec{r})) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{rot}(-\text{grad}\, V(\vec{r})) = 0$$

Großmann S. 143

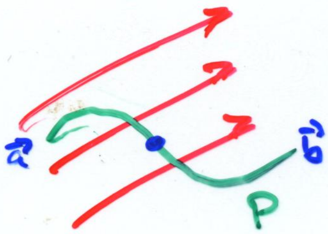
③ Satz von Stokes

$$\oint_P \vec{F}\, d\vec{r} = \int_O \text{rot}\, \vec{F}\, d\vec{A}$$

Weg   Oberfläche   Flächenelement

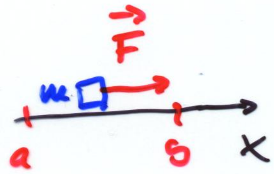
2.3.2 Energie

a) Potentielle Energie Arbeit für unbeschleunigte Bewegung



$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} F(\vec{r})\,d\vec{r} = \underbrace{E_p(\vec{b}) - E_p(\vec{a})}_{\text{Potentielle Energie}}$$

b) Kinetische Energie Arbeit, die zu Beschleunigung führt



$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} m\vec{a}\,d\vec{r} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{v(\vec{a})}^{v(\vec{b})} m\vec{v}\,d\vec{v} = \frac{1}{2} m \left(v_b^2 - v_a^2\right)$$

$$= E_K(\vec{b}) - E_K(\vec{a})$$

Energiesatz der Mechanik

Im konservativen Kraftfeld ist Energie erhalten

$$E_{total} = E_{kin}(\vec{a}) + E_{pot}(\vec{a}) =$$

$$E_{kin}(\vec{b}) + E_{pot}(\vec{b}) = \text{const}$$

Allgemein: In einem geschlossenen System ist die Summe aller Energieformen konstant.

Erhaltungssätze: Zentrales Konzept der Physik

→ Häufig einfacher als Bewegungsgl.