Experimentelle Physik I
WS 16/17

Veranstaltung 4010011
https://campus.studium.kit.edu/event/H7Ke2neVDU6OCIWVculqYw

PD Dr. Andreas B. Meyer (KIT und DESY)

12. Vorlesung: 2.5 Rotation massiver Objekte (1)

Karlsruher Institut für Technologie

29. November 2016

29.11.2016

Zusammenfassung

2.4.2. Elastische und Unelastische Stöße

- Luftkissenbahn
  - elastischer Stoß $m_2 = 2m_1$ und $v_{2i} = 0$
  - inelastischer Stoß $m_1 = m_2$, $v_{2i} = 0$, $v_{1f} = v_{2f}$
- Diskussion "Zeitumkehr" → Zerfall
  - zwei Wagen
  - Schlittschuhläufer

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2$$

vergl. β-Zerfall

v hängt ab von E_{pot}

- Stöße in 2 oder 3 Dimensionen
  - Laborsystem und CM-System
  - elastischer Stoß $m_1 = m_2 = 0$ $\Rightarrow \vartheta = 90°$ oder $v_{1f} = 0$

vergl. Rutherford-Experiment

2.4.3. Systeme mit variabler Masse

- Raketengleichung

$$v_{end} = v_{rel} \cdot \ln\left(\frac{m_r + m_b}{m_r}\right) + v_0$$

2.5. Rotation massiver Objekte

Kinematik — Translation in 3D

Rotationskinematik — Drehungen in 3D (um 3 Achsen)

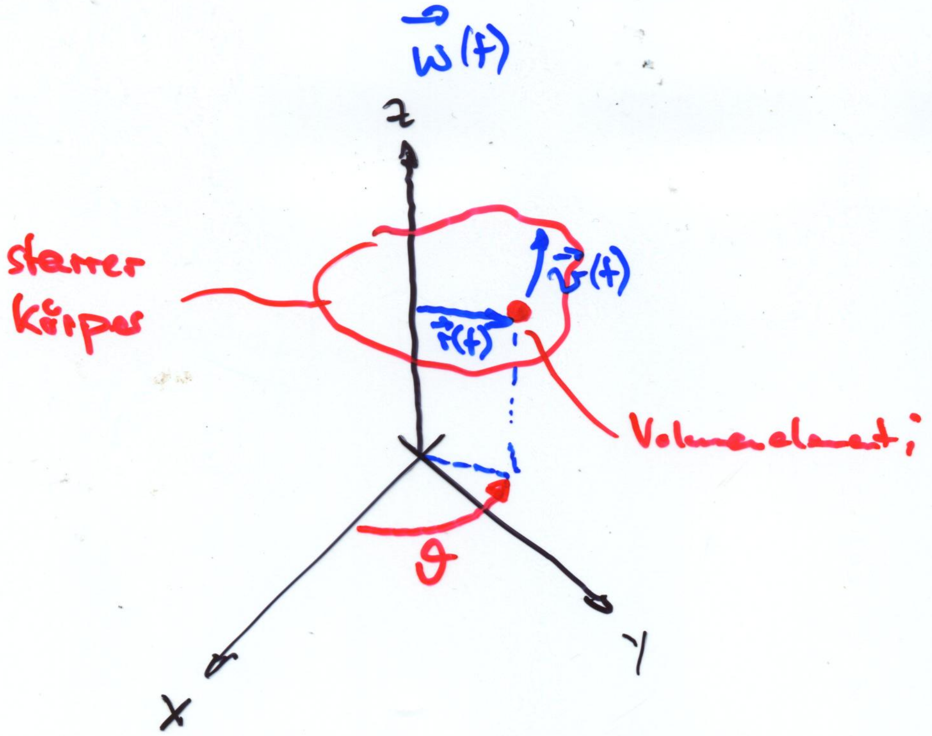
Dynamik

Rotationsdynamik

Kraft	Drehmoment
Masse	Trägheitsmoment
Energie	Rotationsenergie
Impuls	Drehimpuls

Kombinierte Bewegung, z.B. Rollen

- Rotation analog zu Translation
- Zerlegung jeder Bewegung in Translation des Schwerpunkts + Rotation um den Schwerpunkt



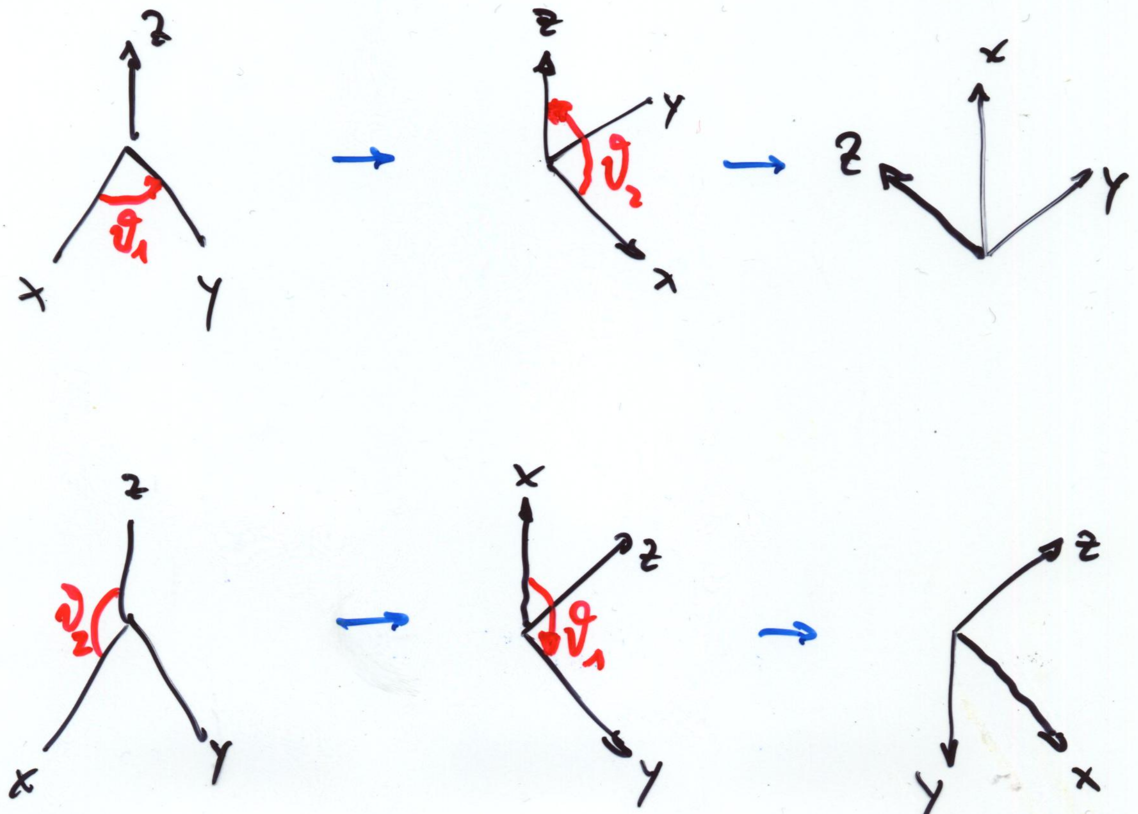
rechtshändiges System

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt}$$

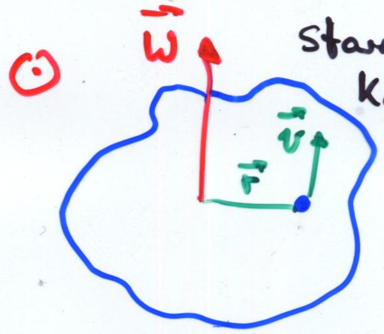
$\perp \vec{v}, \vec{r}$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \qquad \vec{v}_{i,ges} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i$$

N.B.: ϑ ist kein Vektor, da $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \vartheta_2 + \vartheta_1$



2.5.1 Massenträgheitsmoment



$$E_{kin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{J \text{ (oder } I)} \cdot \omega^2$$

$$M = \int_V \rho \, dV$$

$$J = \int r^2 \rho \, dV$$

senkrecht zu $\vec{\omega}$

$$\boxed{J = \sum_i m_i r_i^2}$$

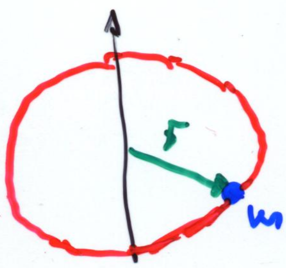
Massenträgheitsmoment

$$\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2}$$

Rotationsenergie

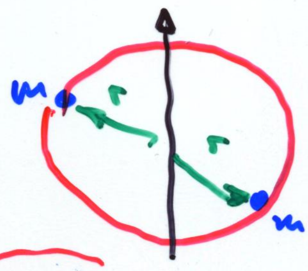
Beispiele

a) Einzelne Masse



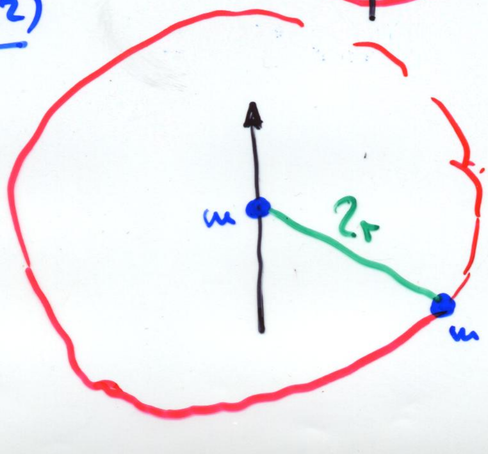
$$J = mr^2$$

b) Hantel



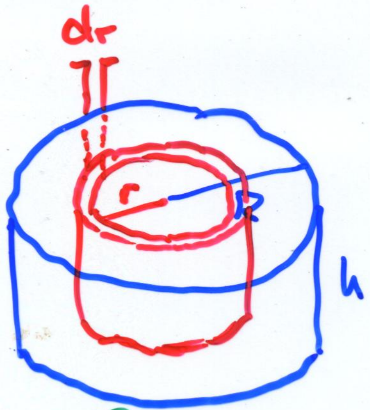
$$J = 2mr^2$$

c) Hantel (2)



$$J = m(2r)^2 = 4mr^2$$

d) Zylinder



$$J = \int r^2 \rho \, dV$$

Integration über Zylinderschalen

$$dV = h \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$J = \int_0^R r^2 \rho h \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 \, dr$$

$$= 2\pi h \rho \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\pi h \rho R^2}_{M} \cdot R^2 = \frac{1}{2} M R^2$$

e) Hohlzylinder

$$J = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho \, dV = \frac{1}{2} \pi h \rho \cdot (R_2^4 - R_1^4)$$

$$(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

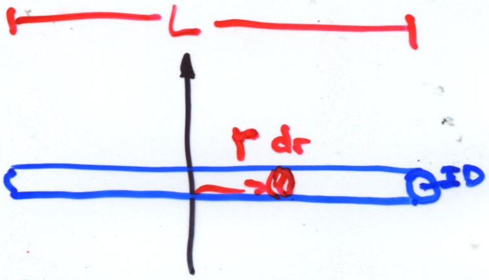
$$M = \pi h \rho (R_2^2 - R_1^2)$$

$$J = \frac{1}{2} M (R_2^2 + R_1^2)$$

Für $R_1 \to R_2$ $\quad J = M . R$

alle Massenpunkte
auf der äußersten Schale

f)



$$dV = \underbrace{\pi D^2}_{\text{Querschnitt}} \cdot dr$$

$$J = \int_{-L/2}^{+L/2} r^2 \rho \pi D^2 \, dr$$

$$= \rho \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot r^3 \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{3} \rho \pi D^2 \cdot 2 \cdot \frac{L^3}{8}$$

$$M = \rho \pi D^2 \cdot L \qquad \Rightarrow J = \frac{1}{12} M L^2$$

Allgemein: rotationssymmetrische Objekte:

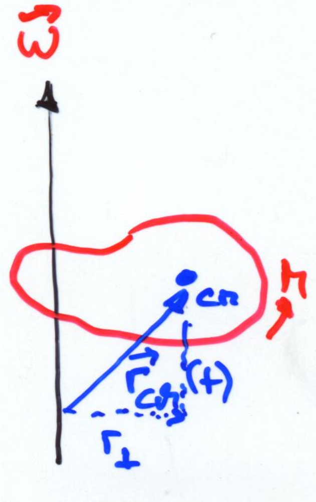
$$\boxed{J = \varkappa \cdot M R^2}$$

Trägheitsmoment ist abhängig von Masseverteilung und Drehachse

$\varkappa = 0 \ldots 1$

← KAPPA

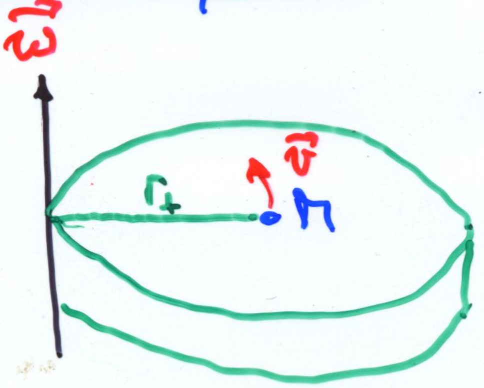
Satz von Steiner



$$E_k = \underbrace{\frac{1}{2} J_{cm} \omega^2}_{\text{Rotation um CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} M \omega^2 r_\perp^2}_{\text{Rotation von M um die Drehachse}}$$

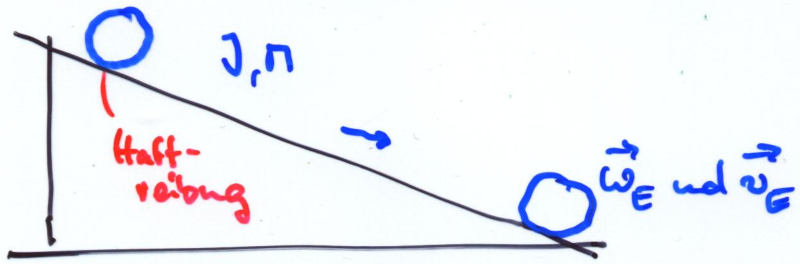
$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(J_{cm} + M r_\perp^2)}_{J_{ges}} \cdot \omega^2$$

Beispiel: Zylinder



$$\left.\begin{array}{l} J_{cm} = \frac{1}{2} m r_1^2 \\ J_{r_1} = m r_1^2 \end{array}\right\} J = \underbrace{\frac{3}{2} m r_1^2}_{= 3 J_{cm}}$$

$\Rightarrow$ Versuch Walzenrennen



$$E_{tot} = mgh + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \text{const} \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_E^2 + \frac{1}{2} J \omega_E^2$$

$$v_E = \sqrt{\frac{2g \cdot h}{1 + J/mR^2}} \qquad J = \varkappa \cdot m R^2 \qquad v_E = \sqrt{\frac{2 g \cdot h}{1 + \varkappa}}$$

Beispiele

Zylinder $\varkappa = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $v_E = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2gh}$

Hohlzyl. $\varkappa = 1$ $\Rightarrow$ $v_E = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{2gh}$

Kugel $\varkappa = \frac{2}{5}$ $\Rightarrow$ $v_E = \sqrt{\frac{5}{7}} \sqrt{2gh}$

2.5.2 Drehimpuls und Drehmoment

Translation: Impuls $\vec{p}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{cm} = \text{konst.}$

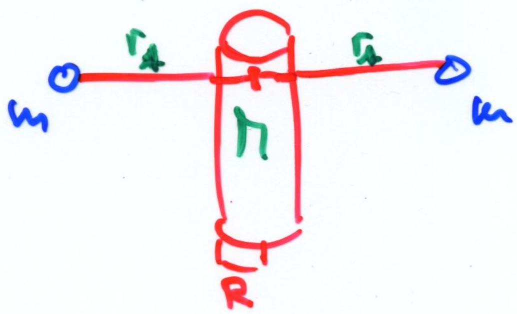
↑ ohne äußere Kräfte

Rotation: Drehimpuls $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} = \text{konst}$

↑ ohne äußere Drehmomente

→ Versuch Drehstuhl

1)



$$J_1 = \frac{1}{2} M R^2 + 2 m r_1^2$$

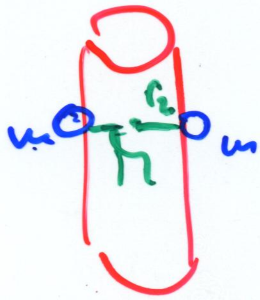
Drehimpuls $L = J \cdot \frac{2\pi}{T}$

$r_1 = 0{,}8\,m$, $M = 50\,kg$; $R = 14\,cm$; $m = 2\,kg$; $T_1 = 2\,s$

$\Rightarrow J_1 = 3{,}05\,kgm^2$

$L_1 = 9{,}6\,kg\,\frac{m^2}{s}$

2.)



$$L_1 \stackrel{!}{=} L_2 \rightarrow J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{J_1}{J_2} \cdot \omega_1 ; \; T_2 = \frac{J_2}{J_1} T_1$$

$r_2 = 0{,}2\,m$

$$J_2 = \frac{1}{2} M R^2 + 2 m r_2^2$$

$J_2 = 0{,}65\,kgm^2$

$T_2 = 0{,}4\,s$

Translation: Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

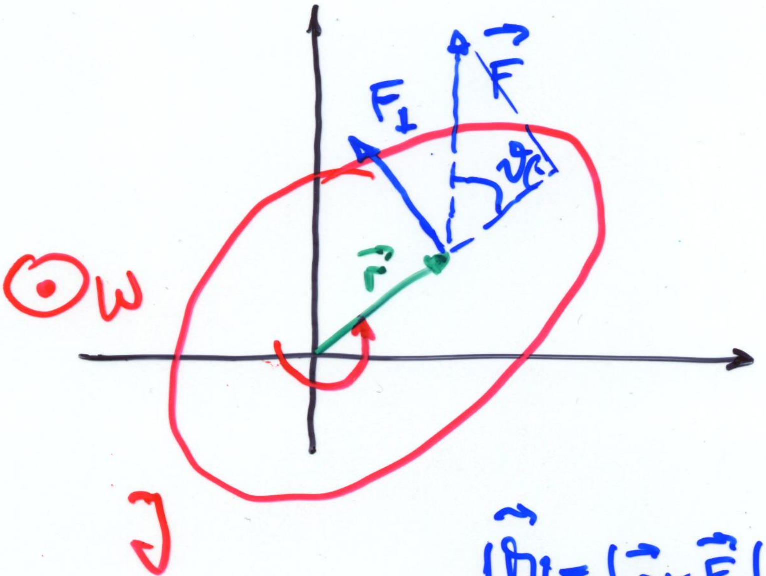
Rotation: $\boxed{\text{Drehmoment} \quad \vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}}$

engl. Torque

Häufig auch $\vec{D}$

Winkelbeschleunigung

→ Versuch: Schwerpunktbestimmung



Kraftkomponente senkrecht zu $\vec{r}$ führt zu beschleunigter Rotation

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \cdot \sin\vartheta$$

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

für r = const

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

Drehimpuls

In einem geschlossenen System ist der Drehimpuls erhalten

→ Versuch: Drehstuhl mit „Drehimpulsübergabe"