Experimentelle Physik I
WS 16/17

Veranstaltung 4010011
https://campus.studium.kit.edu/event/H7Ke2neVDU6OCIWVcuIqYw

PD Dr. Andreas B. Meyer (KIT und DESY)

15. Vorlesung: 2.5 Rotation massiver Objekte (4)

Karlsruher Institut für Technologie

8. Dezember 2016

8.12.2016

Zusammenfassung / Nachtrag

Graßmann Identität "BAC - CAB"

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

2.5.4 Rotierende Bezugssysteme

Inertialsystem: System, in dem sich kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen.

Zentrifugalkraft

Corioliskraft

Herleitung:

$$\vec{v} = \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}' + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}'} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$ Nebenrechnung

$$\vec{a}' = \vec{a} + \underbrace{2(\vec{v}' \times \vec{\omega})}_{\text{Corioliskraft}} + \underbrace{\omega^2 \vec{r}}_{\text{Zentrifugalkraft}} - \underbrace{(\vec{\omega}\vec{r})\vec{\omega}}_{= 0,\ \text{da}\ \vec{r} \perp \vec{\omega}}$$

Nebenrechnung

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{v}' = v_x' \cdot \vec{e}_x' + v_y' \vec{e}_y' + v_z' \vec{e}_z'$$

zeitl. nicht - konstante Einheits - vektoren

$$\frac{dv'}{dt} = \underbrace{\left(\vec{e}_x' \frac{dv_x'}{dt} + \vec{e}_y' \cdot \frac{dv_y'}{dt} + \vec{e}_z' \frac{dv_z'}{dt} \right)}_{\vec{a}'} +$$

Produktregel

$$\underbrace{\left(\frac{d\vec{e}_x'}{dt} v_x' + \frac{d\vec{e}_y'}{dt} v_y' + \frac{d\vec{e}_z'}{dt} v_z' \right)}_{\vec{\omega} \times \vec{v}'}$$

Endpunkte der $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ rotieren mit $\vec{\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_x} \quad \dots$$

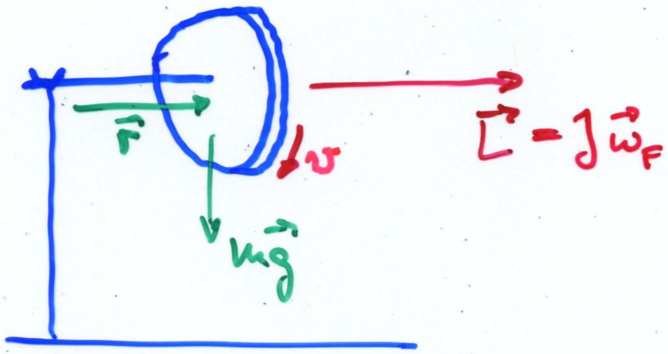
vergl. $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

2.5.5. Rotation um freie Achsen

Bisher: Rotation um raumfeste Achsen (oder beschl. K.S.)

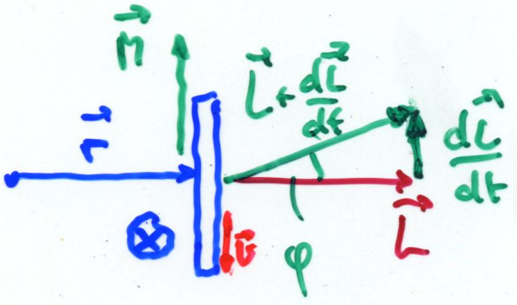
Jetzt: Freie Rotationsachse mit und ohne äußeres Drehmoment

a) Präzession



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_a = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$dL = L\, d\varphi$$

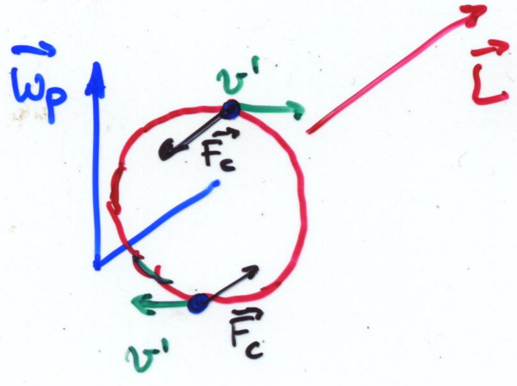
$$\frac{dL}{dt} = L \cdot \frac{d\varphi}{dt} = L\omega_p$$

$\vec{M} \perp \vec{L} \Rightarrow |\vec{L}| = \text{const}$

$$\boxed{\omega_p = \frac{M}{L} = \frac{r \cdot F}{J \cdot \omega_F}}$$

Präzessionfrequenz

Präzession: Betrachtungen zum besseren Verständnis

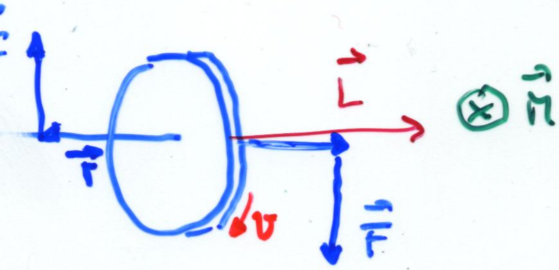
- 

Corioliskraft erzeugt Drehmoment

$$\vec F_c = 2\,\vec v\,' \times \vec\omega_p$$

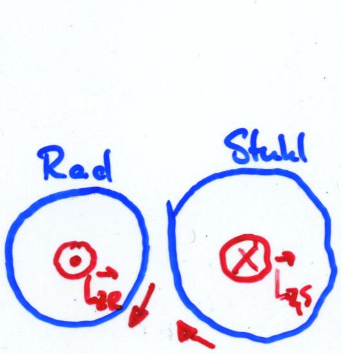
- Drehstuhl

vorher (von der Seite)



$$\underbrace{\vec L_{z,Rad}}_{0} + \underbrace{\vec L_{z,Stuhl}}_{0} = 0$$

nachher (von oben):



$$|\vec L_{z,Stuhl}| > 0$$

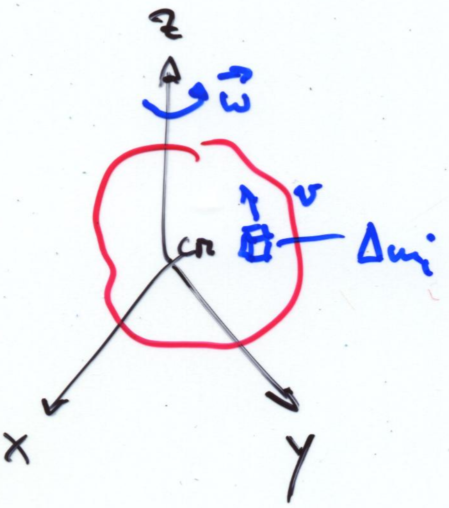
$$\underbrace{\vec L_{z,Rad}}_{\neq 0} + \underbrace{\vec L_{z,Stuhl}}_{\neq 0} \overset{!}{=} 0$$

Drehimpulserhaltung!

b) Trägheitstensor

Bisher: Rotationen um Hauptträgheitsachsen (Rotationssymmetrie)

Jetzt: Rotation um beliebige Achsen



$$\vec L_i = \Delta m_i (\vec r_i \times \vec v_i)$$

$$= \Delta m_i (\vec r_i \times (\vec\omega \times \vec r_i))$$

$$\vec L = \Delta m_i (r_i^2 \vec\omega - (\vec r_i \cdot \vec\omega) \cdot \vec r_i)$$

i.a. $\vec\omega$ und $\vec L$ nicht parallel

Drehimpuls

momentane Drehachse

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}}_{\tilde J\text{: Trägheitstensor}} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec L = \tilde J \cdot \vec\omega$$

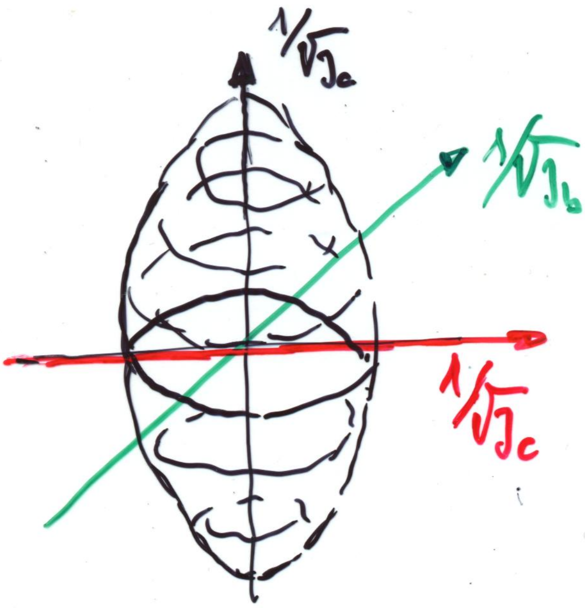
i.a. $\vec L \nparallel \vec\omega$

- $\tilde J$ symmetrisch $\Rightarrow$ Hauptachsentransformation
- $\exists$ 3 senkrechte Richtungen, für die $\vec L \parallel \vec\omega$ ist.

Hauptträgheitsachsen

$\exists$ K.S., in dem $\tilde{J} = \begin{pmatrix} J_a & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & J_c \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{L} = J_a \cdot \vec{\omega}_a + J_b \cdot \vec{\omega}_b + J_c \vec{\omega}_c$$



$J_a \leq J_b \leq J_c$

Für Punkte auf Ellipse gilt:

$r^2 J = \text{const.}$

$\Rightarrow \quad r \propto \frac{1}{\sqrt{J}}$

prolater Kreisel: $J_a < J_b = J_c$

oblater Kreisel: $J_a = J_b < J_c$

c.) Rotation um Hauptträgheitsachsen:

c: größtes J $\Rightarrow$ kleinste Rotationsenergie bei festem Drehimpuls

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 \; ; \; L = J\omega \Rightarrow E_{rot} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{J}$$

c: J maximal

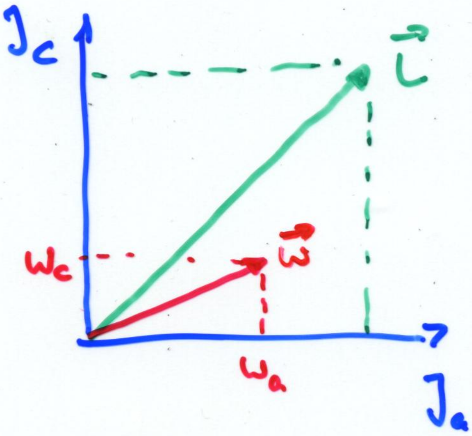
E_{rot} minimal

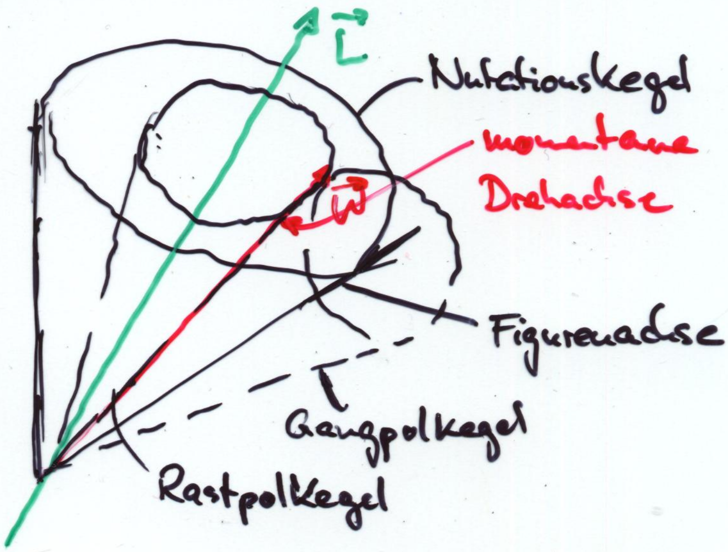
d) Nutation

Allgemeine Bewegung (ohne äußeres Drehmoment)

Betrachte symmetrischen Kreisel mit $\vec{\omega} \nparallel \vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{L}_a + \vec{L}_c = J_a \vec{\omega}_a + J_c \vec{\omega}_c \qquad \vec{\omega} \nparallel \vec{L}$$





Nutation

J_a und J_c i.a. verschieden.

Figurenachse u. momentane Drehachse auf Kegelmänteln um $\vec{L}$

a) stabile Rotation ohne $\vec{M}$ $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

b) Präzession mit äußerem $\vec{M}$ $\vec{L} \parallel \vec{\omega}_F$

c) Nutation ohne $\vec{M}$ $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

d) Überlagerung von Präzession u. Nutation