# Experimentelle Physik I
## WS 16/17

Veranstaltung 4010011
https://campus.studium.kit.edu/event/H7Ke2neVDU6OCIWVculqYw

PD Dr. Andreas B. Meyer (KIT und DESY)

**16. Vorlesung: 3.1 Gravitation (1)**

Karlsruher Institut für Technologie

13. Dezember 2016

# 2.6. Zusammenfassung Mechanik

## Die Newtonschen Gesetze

freies Teilchen

"$N_1$" $\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$ Trägheitsgesetz

"$N_2$" $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v})$ ; falls $m = \text{const}$: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Newtonsche Bewegungsglg.

$\Rightarrow$ Impulserhaltung
Superpositionsprinzip
Actio = Reactio

Beispiele u. Versuche: Konstante u. zeitabhängige Kräfte DGL
ohne und mit Reibung

## Arbeit und Energie

$$\Delta A = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta \vec{r}$$

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) = 0 \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{r}) \text{ ist konservativ}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, V(\vec{r}) \text{ so, daß } \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

In konservativen Kraftfeldern ist die Energie erhalten

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \text{const.}$$

Beispiele u. Experimente zur Energieerhaltung

## Systeme von Massenpunkten

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Schwerpunkt verhält sich wie ein Massepunkt der Masse M

Impulserhaltung jetzt nützlich

Elastische u. Inelastische Stöße vergl. "Zerfälle", Rakete

# Rotation massiver Objekte

| | | |
|---|---|---|
| Massenträgheitsmoment | $J = \varkappa m r^2$ | |
| Rotationsenergie | $E = \frac{1}{2} J \omega^2$ | $= \frac{L^2}{2J}$ |
| Drehmoment | $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ | $= \frac{d\vec{L}}{dt}$ |
| Drehimpuls | $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \overset{(\sim)}{J} \cdot \vec{\omega}$ | |

## Beispiele u. Experimente zur Rotation

z.B. Drehschwingungen

## Trägheitskräfte in beschleunigten Bezugssystemen

Zentrifugalkraft

Corioliskraft

## Rotation um freie Achsen (insbes. symmetrische Kreisel)

| | | |
|---|---|---|
| stabile Rotation | ohne $\vec{M}$ | $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ |
| Präzession | mit äußerem $\vec{M}$ | $\vec{L} \parallel \vec{\omega}_F$ |
| Nutation | ohne $\vec{M}$ | $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$ |

Überlagerung von Präzession u. Nutation

Nachtrag: Trägheitsellipsoid: Für Punkte auf Ellipsoid gilt:

$$R^2 J = K = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad R \propto \frac{1}{\sqrt{J}}$$

Skalierung der Ellipsoid-Achsen mit $1/\sqrt{J}$ : $\hat{=}$ Raumkomponenten des Körpers

# 3. Gravitation

Fundamentale Kräfte

- Gravitation
- Elektromagnetische Kraft
- Schwache Kernkraft
- Starke Kernkraft

## 3.1. Gravitationsgesetz

Historisch:

- um 140: Ptolemäus
  - geozentrisches System
- 1473–1543: Kopernikus
  - heliozentrisches System

„Kopernikanische Wende"

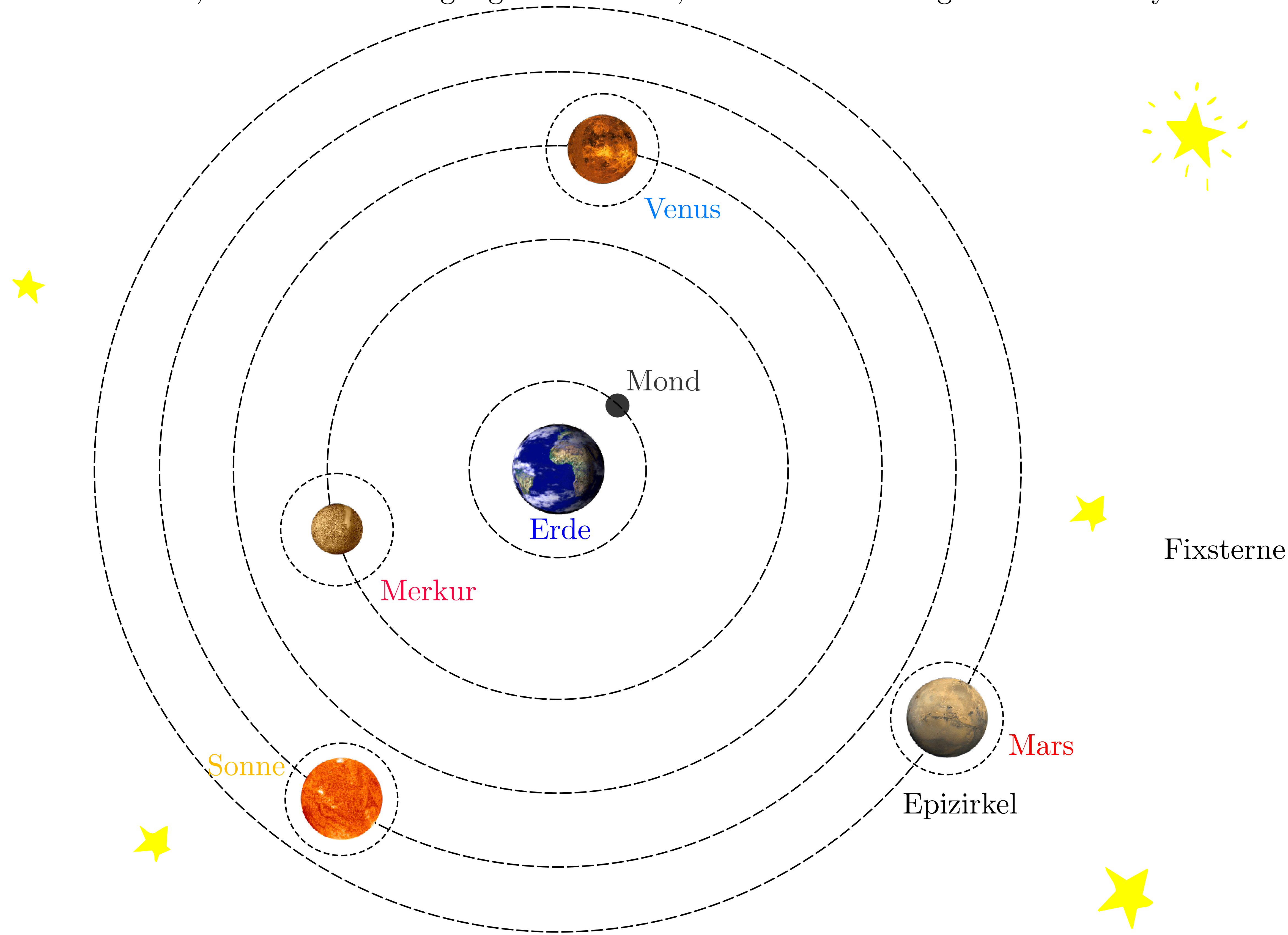
- 1546–1601 Brahe
  - geo-heliozentrisches System
  - präzise astronomische Instrumente u. Beobachtungen

im Gegensatz zu göttlichen Einsichten

- 1571–1630 Kepler (Assistent von Brahe)
  - Empirische Gesetze der Planetenbahnen

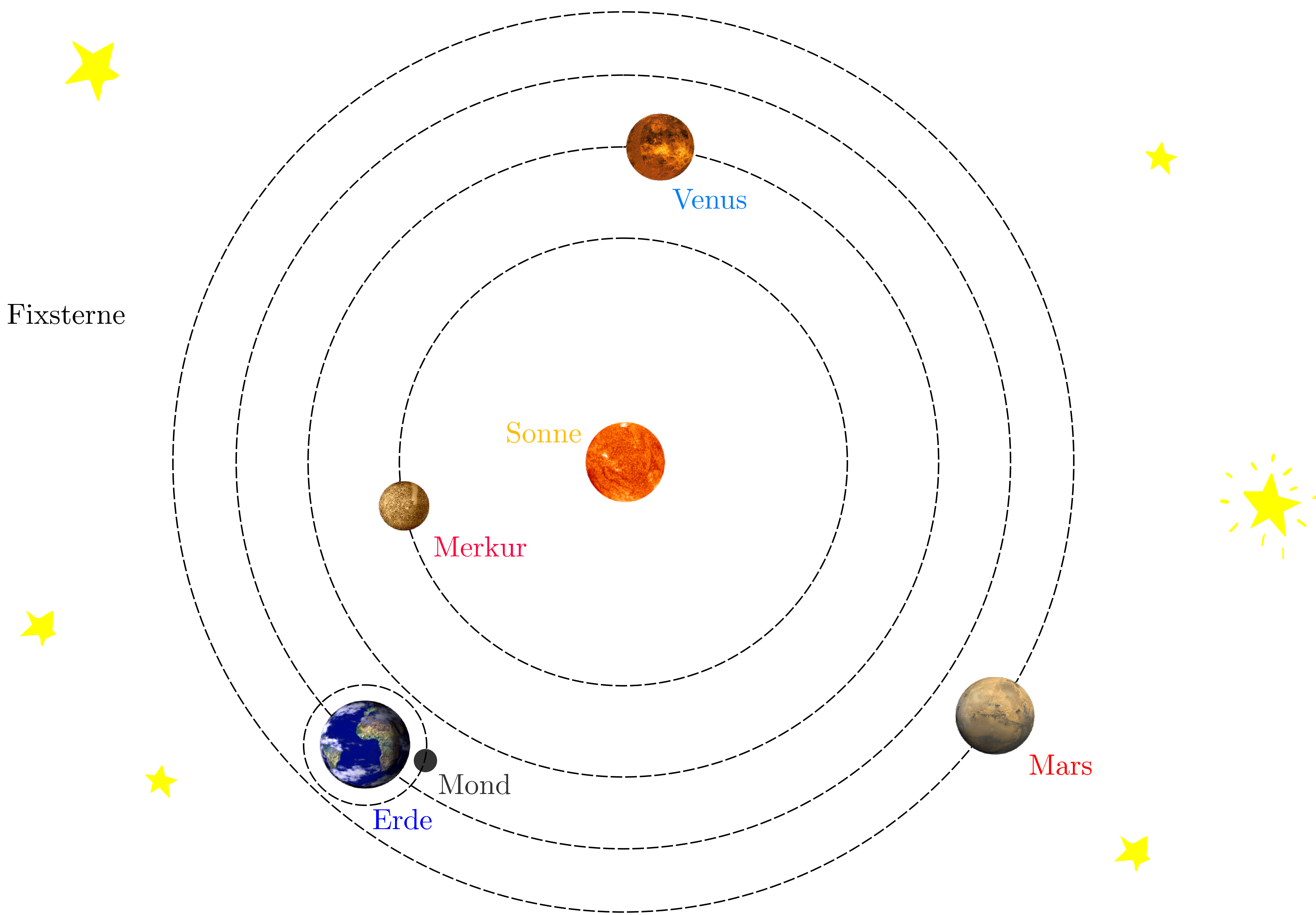
## ≈ 0 A.D.: Ptolemäus

Der erste Versuch, die Planetenbewegung zu verstehen, war die Idee eines geozentrischen Systems.



## 1473-1543: Copernikus

Copernikus war für die Entwicklung der Theorie des heliozentrischen Systems verantwortlich.

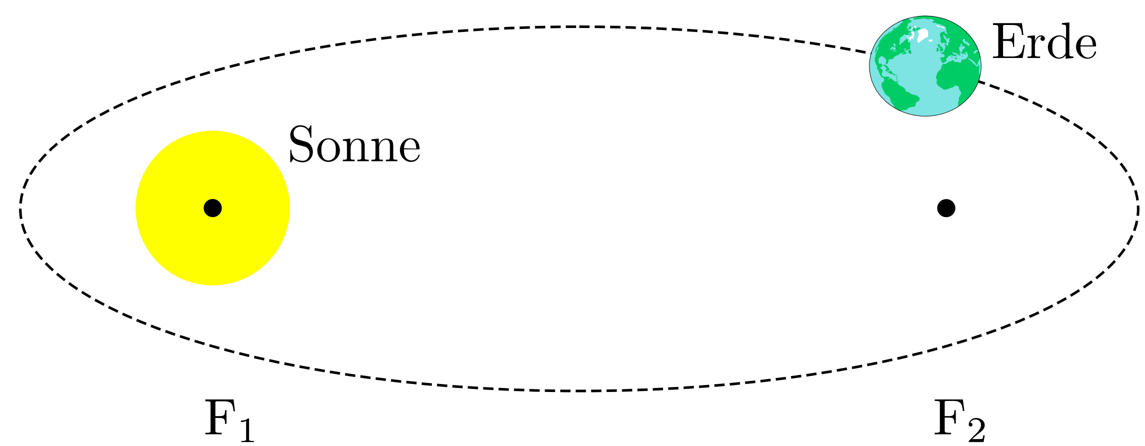


## 1571-1630: Kepler (Assistent von Brahe, mit Teleskop)

KEPLER stellte empirische Gesetze zur Planetenbewegung auf.

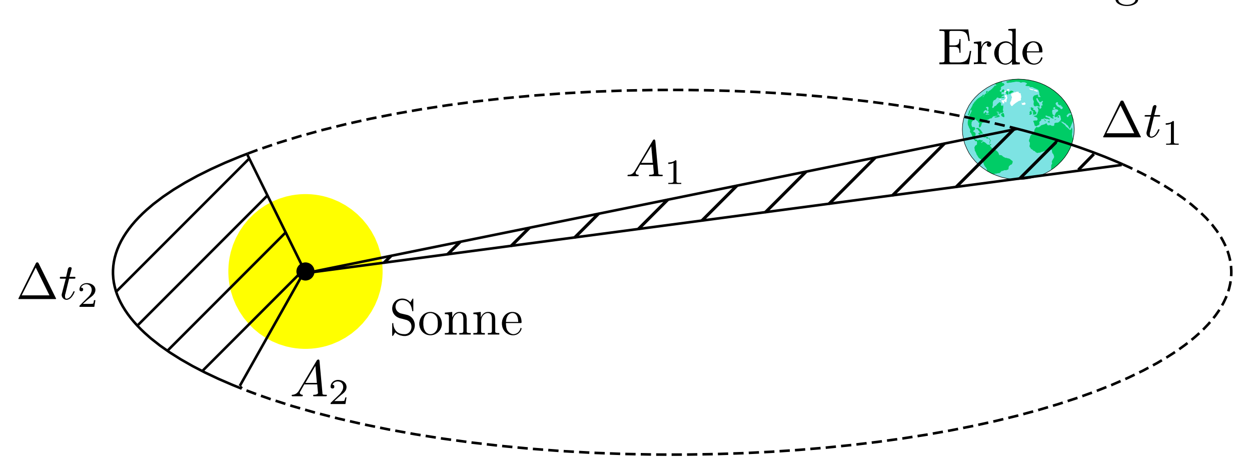
① Gesetz der Laufbahn (Orbit):

Planetenbahnen sind Ellipsen mit der Sonne in einem der beiden Brennpunkte (Focusse).




② Flächengesetz:

Linie zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleicher Zeit gleiche Fläche.




$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

③ Periodengesetz:

$$T^2 \sim \langle R \rangle^3$$

$T \mathrel{\hat{=}}$ Umlaufperiode, $\langle R \rangle \mathrel{\hat{=}}$ mittlerer Radius

• 1642 - 1727 Newton

Fallende Körper u. Planetenbahnen beruhen auf der gleichen Kraft

• Gravitationsgesetz

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -G \, \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_{12}}$$


- Kraft der Masse $m_1$ auf Masse $m_2$

- $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{Nm^2}{kg^2}$

- Diskussion

① $G = const \; ; \; \frac{dG}{dt} = 0$ Naturkonstante

② $F \propto m_1 \cdot m_2$ Warum $m_1 \cdot m_2$?

- symmetrisch — D.h. $F_{12} = F_{21}$
- Superpositionsprinzip

Definiere Einheitselement $\Delta m$

Kraft zwischen $\Delta m$ u $\Delta m$: $\Delta \vec{F} = \vec{F}_{\Delta m, \Delta m}$

$\Rightarrow m_1 = N_1 \cdot \Delta m$ und $m_2 = N_2 \cdot \Delta m$ Superpositions-prinzip

$$\Rightarrow \vec{F}_{N \cdot \Delta m, \Delta m} = N \cdot \Delta \vec{F}$$

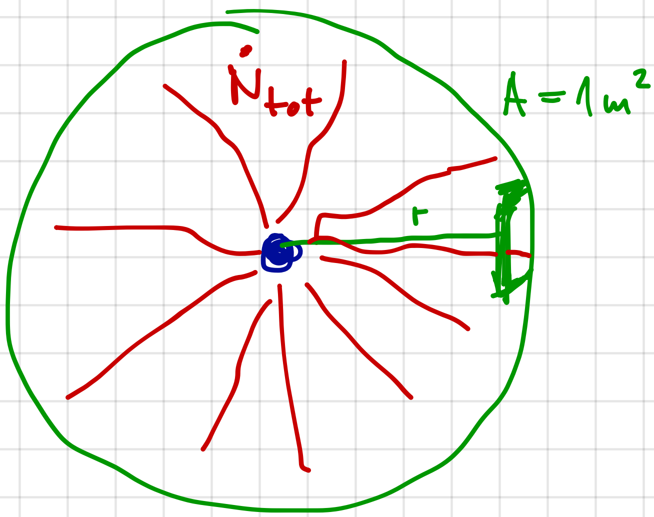
$$\vec{F}_{N\Delta m, M\Delta m} = N \cdot M \cdot \Delta \vec{F}$$

$$= \boxed{\vec{F}_{m_1, m_2} \propto m_1 \cdot m_2}$$

(3) $F \propto \frac{1}{r^2}$

Kraft vermittelt durch Austausch von Bosonen

masselose Gravitonen




Annahme: $\frac{N \text{ Gravitonen}}{\text{Zeiteinheit}}$

Gesamtrate $\dot{N}_{tot} = \frac{N}{\Delta t}$

Im Abstand $r$ ist der Fluss durch das Oberflächenelement $A$

$$\dot{N}(r) = \frac{N}{\Delta t} \cdot \frac{A}{4\pi r^2}$$

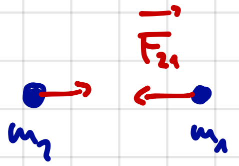
Kugeloberfläche

$$\boxed{\dot{N}(r) \sim \frac{1}{r^2} \propto \text{Kraft } F(r)}$$

Gravitationskraft hat unendliche Reichweite.

$\vec{F}_G(\vec{r}) \neq 0$ für alle $r$.

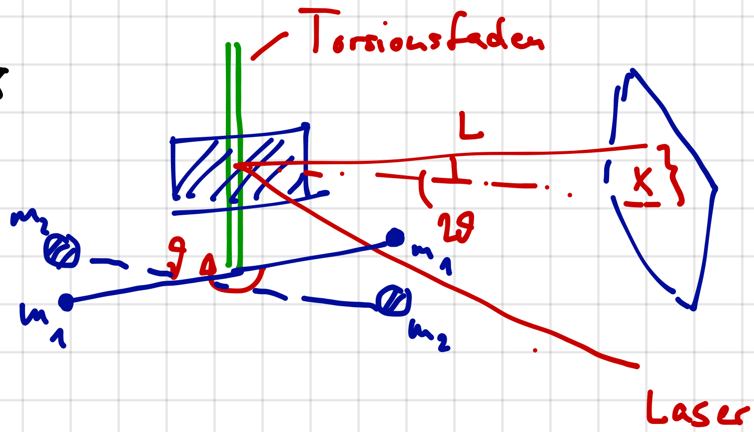
# 3.2. Bestimmung der Gravitations Konstanten



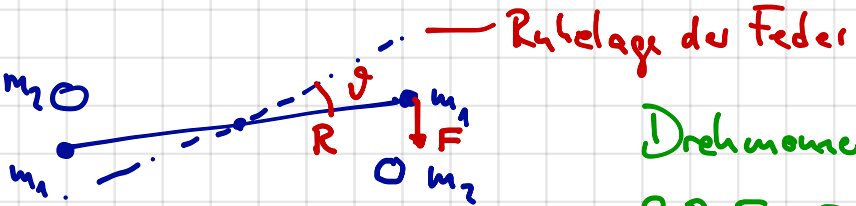

$$F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Experiment: Cavendish 1798

Historisch: Experiments to determine the density of the Earth




a) stabile Position:



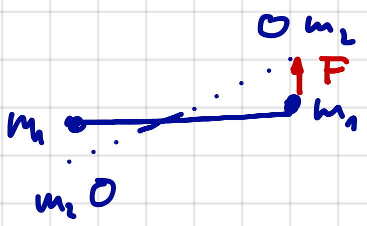

Drehmoment:

$$2 \cdot R \cdot F - D\vartheta = 0$$

2 Massen

Torsionsmodul (Federkonst.)

b) Umlagern von $m_2$:




Beschleunigung von $m_1$

$$2RF + D\vartheta = J \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 2m_1R^2\frac{d^2\vartheta}{dt}$$

Näherung Abstände gleich

Näherung = 2RF auch für t > 0

$$2 \cdot 2 \cdot R \cdot G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 2m_1R^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} \rightarrow G = \frac{1}{2}\,\frac{r^2 \cdot R}{m_2} \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

(NB: $m_1$ cancels)

Näherung: $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \alpha = \text{const}$

Dann ist: $\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2\vartheta(t)}{t^2}$

Messung: $2\vartheta(t) = \frac{x(t)}{L} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{x(t)}{L \cdot t^2}$

Zahlen: $r = 4\,cm$, $R = 5\,cm$, $L = 14\,m$,
$m_2 = 1{,}5\,kg$, $t$ und $x(t)$ aus Messung

Messwerte:

| t[s] | 60 | 70 | 80 | 90 | 105 | 120 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x[2cm] | 5 | 7 | 8,5 | 10 | 13,5 | 15,5 | 21,5 |

für t = 90 s

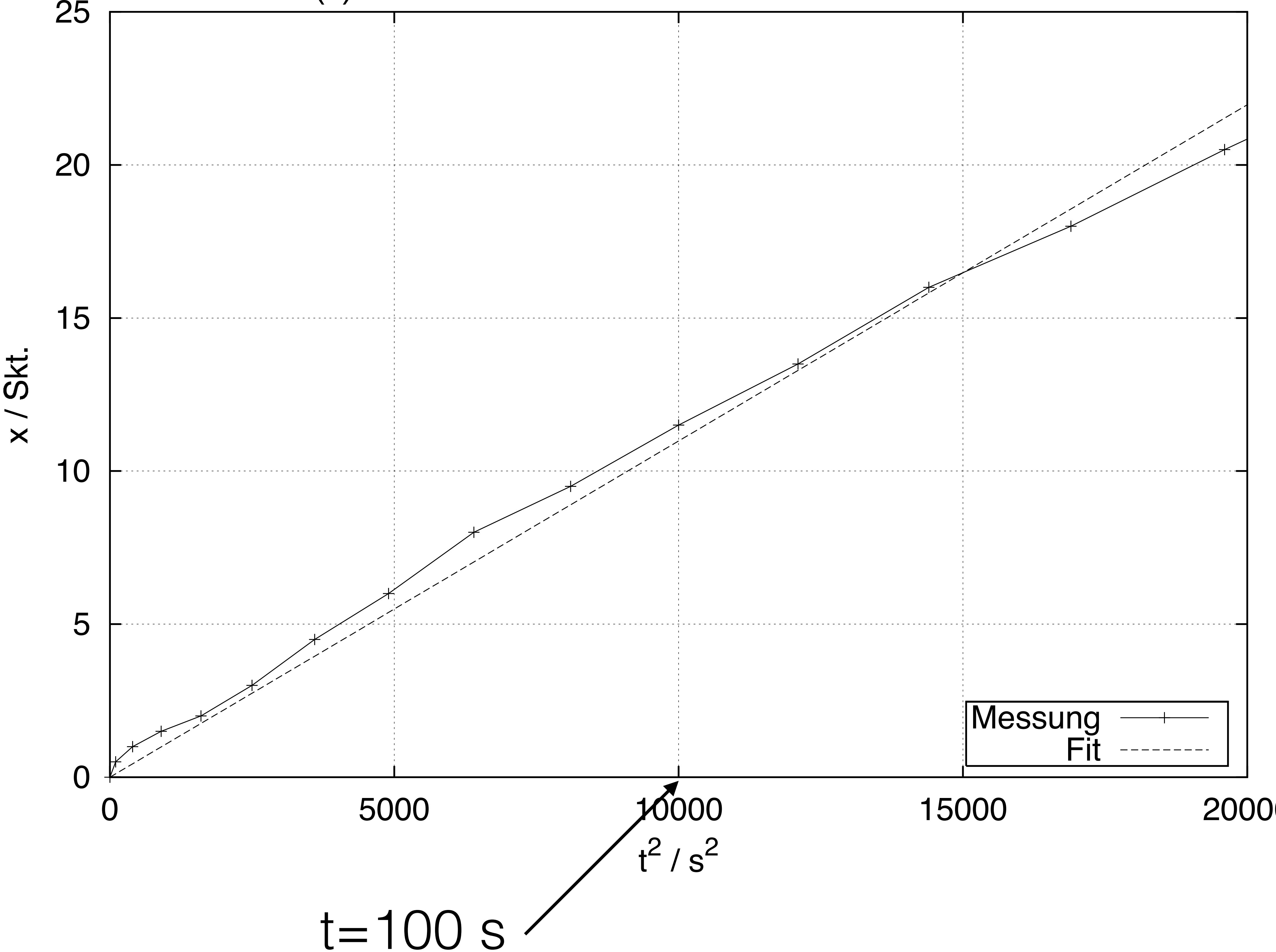
$$G = \frac{1}{2}\,\frac{(0{,}04\,m)^2 \cdot 0{,}05\,m}{1{,}5\,kg} \cdot \frac{0{,}20\,m}{14\,m \cdot (90\,s)^2} =$$

$$G = 4{,}7 \cdot 10^{-11}\ m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$$

Genauere Bestimmung durch Kombination der Meßwerte im Bereich, wo $\alpha$ konstant, d.h. t ausreichend klein.

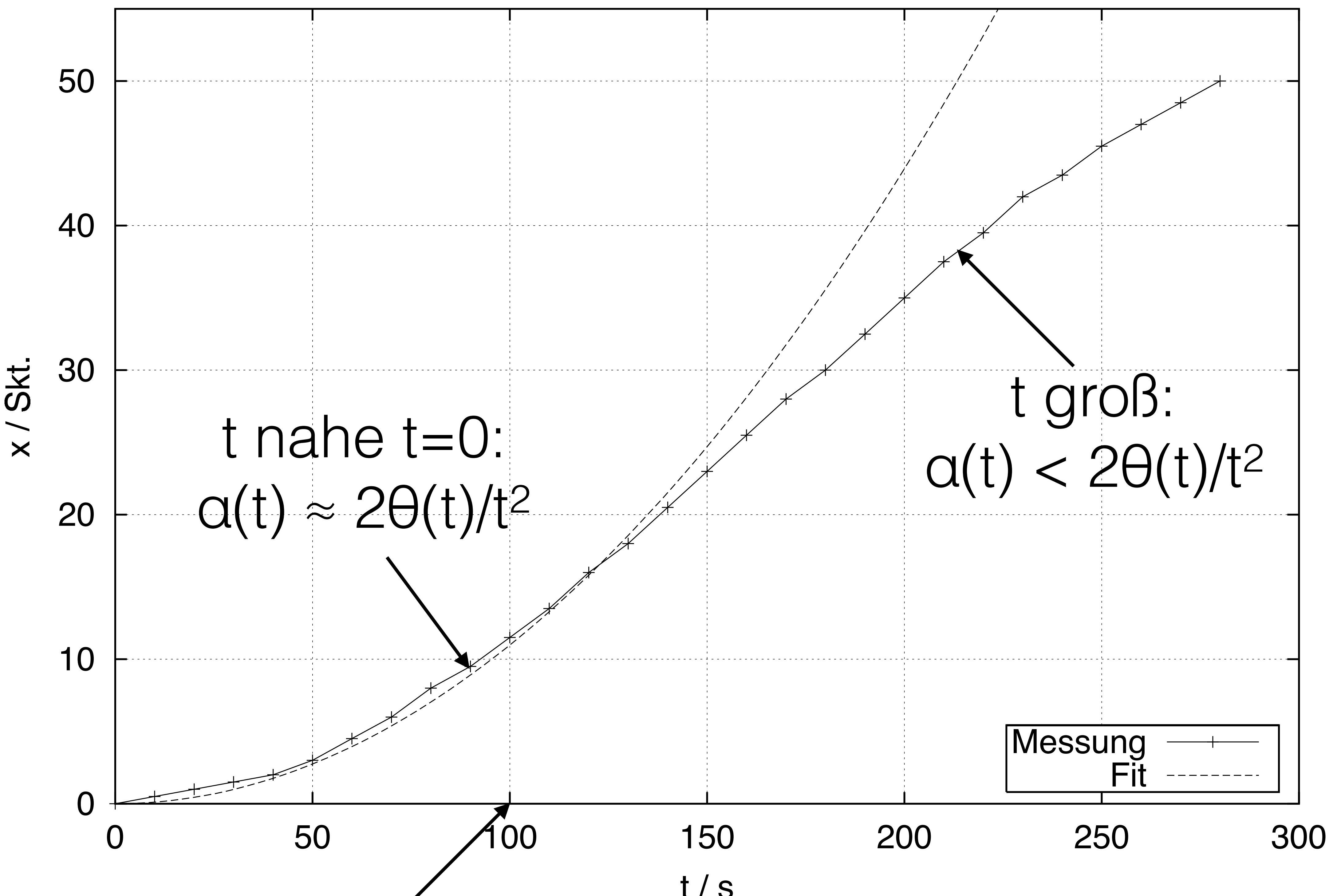
# Gleiches Experiment: frühere Messung

## x(t) vs $t^2$ im Bereich konstanter Beschl.



# Gleiches Experiment: frühere Messung

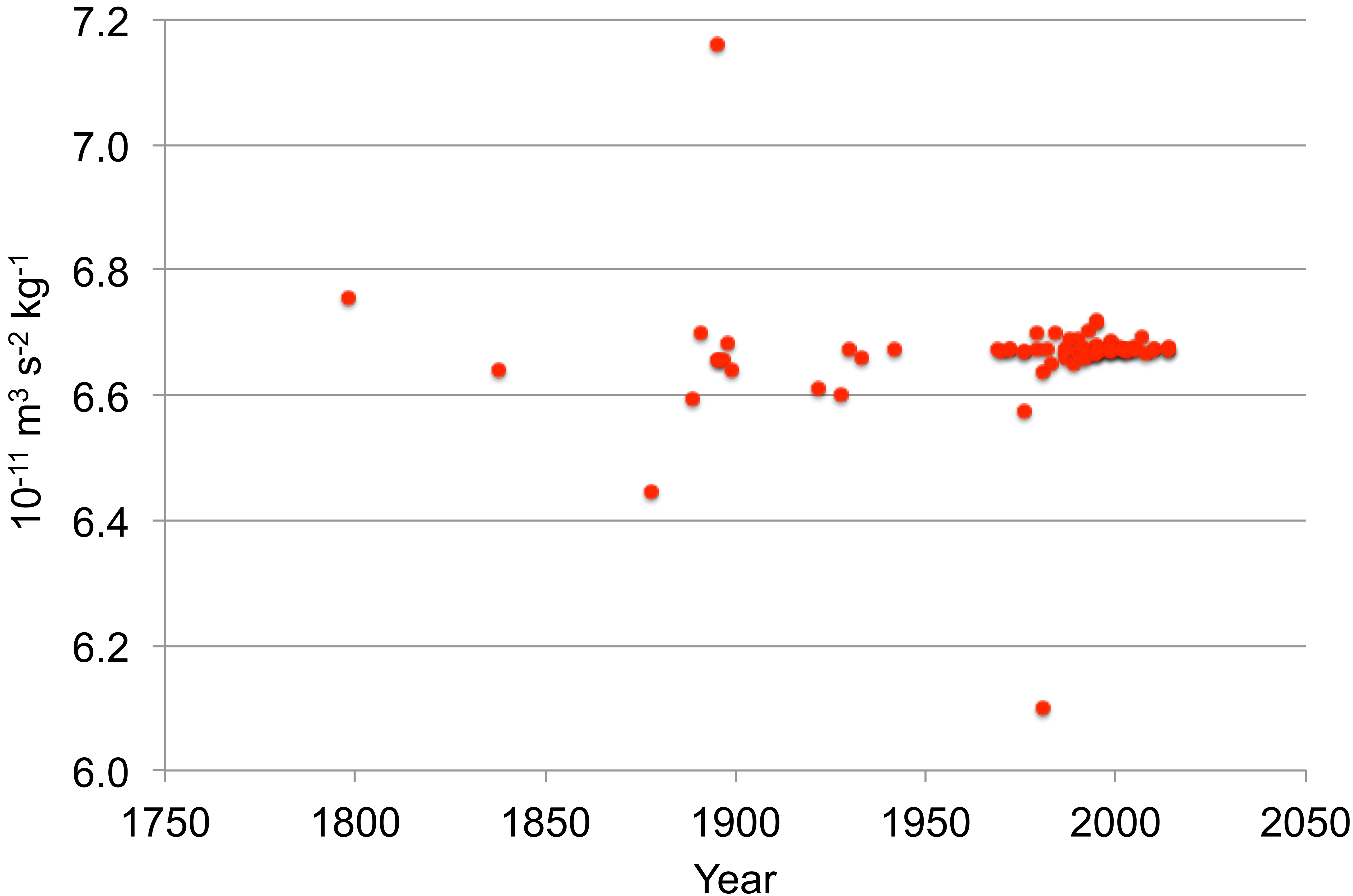
## x(t) vs t über längeren Zeitraum




t=100 s

Konstante Beschl.: gute Näherung bis t ~ 120s

# Werte von G


7.2
7.0
6.8
6.6
6.4
6.2
6.0
10-11 m3 s-2 kg-1
1750
1800
1850
1900
1950
2000
2050
Year

$$G = 6.674215 \pm 0.000092 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$$

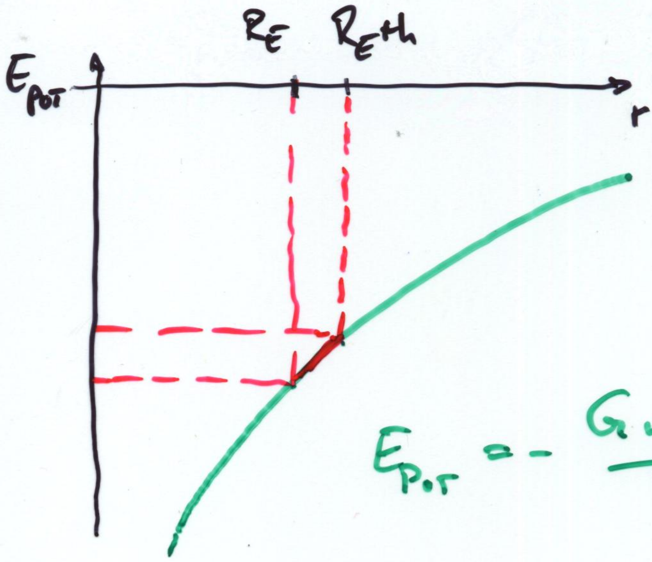
TABLE II. One $\sigma$ error budget.

| Quantity | Measurement uncertainty | $\Delta G/G$ (ppm) |
|---|---|---|
| Systematic errors: | | |
| Pendulum | | |
| Width | $<20\ \mu$m | 0.4 |
| Thickness and flatness | $<4.0\ \mu$m | 4.0 |
| Attractor masses: | | |
| Diagonal separation | $<1.0\ \mu$m | 7.1 |
| Ball-bar calibration | $<0.2\ \mu$m | 1.4 |
| Vertical separation | $<1.0\ \mu$m | 5.2 |
| Sphere diameter | $<1.5\ \mu$m | 2.6 |
| Temperature uncertainty | $<100$ mK | 6.9 |
| Mass | $<3.0$ mg | 0.4 |
| Air humidity | | 0.5 |
| Residual twist angle | | 0.3 |
| Magnetic fields | | 0.6 |
| Rotating temperature gradient | | 0.4 |
| Time base | $<10^{-7}$ | 0.1 |
| Data reduction | | 2.0 |
| Statistical error: | | 5.8 |
| Total: | | 13.7 |

Jens H. Gundlach and Stephen M. Merkowitz
Phys. Rev. Lett. 85, 2869 (2000)

Relative
Unsicherheit:
$1.37 \cdot 10^{-5}$

## 3.3. Gravitationspotential


$$E_{pot} = -\frac{G\, m_E \cdot m}{r}$$

$$A = \Delta E_{pot}(h) = \int_{R_E}^{R_E+h} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{R_E}^{R_E+h} \frac{G\, m_E\, m}{r^2} \cdot dr =$$

$$= -G\, m_E \cdot m \left( \frac{1}{R_E+h} - \frac{1}{R_E} \right)$$

$$= \frac{G\, m_E \cdot m}{R_E} \cdot \Big( 1 - \underbrace{\frac{1}{1 + h/R_E}}_{1 - \frac{h}{R_E}} \Big)$$

Binomische Reihe: $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \Rightarrow x \approx 0 : 1 - x + \underbrace{\ldots}_{\text{Klein}}$

$$= \underbrace{\frac{G \cdot m_E}{R_E^2}}_{g} \cdot m \cdot h$$

$$A_\infty = \int_{R_E}^{\infty} \vec{F}\,d\vec{r} = \frac{G m_E m}{R_E} = E_p(\infty) - E_p(R_E)$$

$\llcorner = 0$ Konvention

$$E_p(R_E) = -\frac{G m_E m}{R}$$

Potentielle Energie: Arbeit, um m nach ∞ zu bringen.

## Anwendungen

a) $v_{Flucht}$: Erdoberfläche: Energieerhaltung

$$\frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{G m_E m}{R_E} = 0$$

$$v_F = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot m_E}{R_E}} = 11{,}2\ \frac{km}{s}$$

b) Für $v_F = c$: $\boxed{R_S = \frac{2GM}{c^2}}$ Schwarzschildradius

Grenzradius, bei dem Objekt zu schwarzem Loch wird

Beispiele:

Sonne: $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}\ kg \Rightarrow R_S = 3\,km$ $\quad R_\odot = 0{,}7 \cdot 10^6\ km$

Neutronensterne: $M_N \approx M_\odot \ldots 3M_\odot \Rightarrow R_S < 10\,km$ $\quad R_N \sim 20\,km$

Schwarze Löcher: $M_S \geq 5 M_\odot \Rightarrow R_S \geq 15\,km$

bis zu $10^{10} M_\odot$ beobachtet