

# Experimentelle Physik I

## WS 16/17

Veranstaltung 4010011

<https://campus.studium.kit.edu/event/H7Ke2neVDU6OCiWVculqYw>

PD Dr. Andreas B. Meyer (KIT und DESY)

**17. Vorlesung: 3.4 Gravitation (2)**

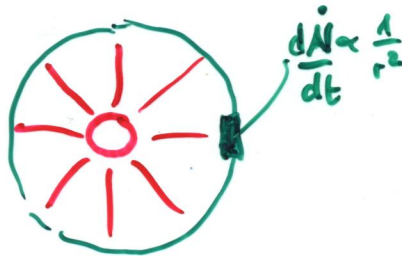
Zusammenfassung3. Gravitation

## 3.1. Gravitationsgesetz

Newton 1642 - 1727

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$

anziehend



Fallende Körper u.  
Planetenbahnen beruhen  
auf der selben Kraft

## 3.2. Bestimmung der Gravitationskonstanten (Cavendish-Exp)

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

$$\Delta G/G \sim 10^{-5}$$

## 3.3. Gravitationspotential

- für  $h \ll R_E$   $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$

-  $E_{\text{pot}} = -\frac{G m E}{r}$

$E_{\text{pot}}(\infty) = 0 \Rightarrow$  Arbeit  
um  $m \rightarrow \infty$  zu befördern

-  $v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2 G m E}{R_E}}$

### 3.4 Planetenbahnen (Keplersche Gesetze)

Kepler 1571 - 1630 (~100 Jahre vor Newton)

Auswertung der von T. Brahe (1546-1601) aufgenommenen Messungen.

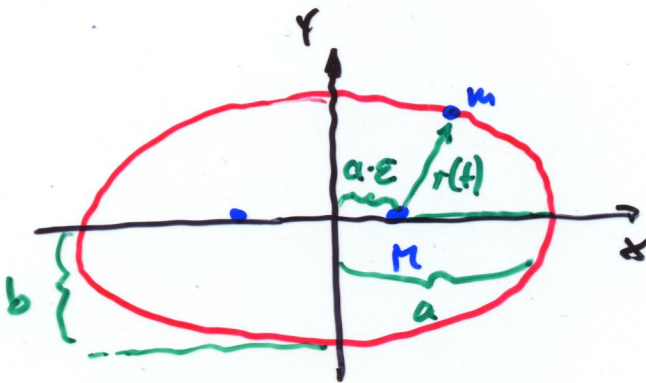
#### 1. Keplersches Gesetz: Gesetz des Orbits

Planetenbahnen bewegen sich auf Ellipsen mit Sonne im Brennpunkt

- $E_{pot}(r) + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} = const$   
 $\Rightarrow r = r(t)$

- $L = m r^2 \cdot \dot{\phi} = const$   
 $\Rightarrow \phi = \phi(t)$

DGL mit  $\frac{d\phi}{dr} \Rightarrow r = r(\phi)$



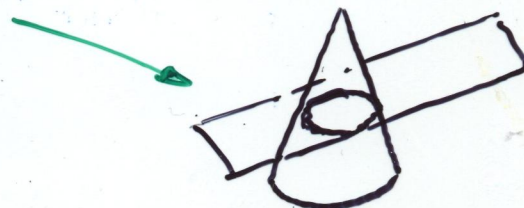
a, b Halbachsen  
epsilon Exzentrizität

Allgemeine Lsg. der obigen DGL: "Kegelschnitte"

Ellipse:  $E < 0$

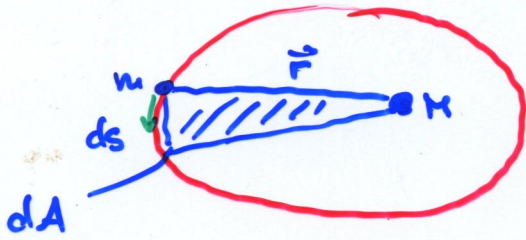
Hyperbel:  $E > 0$

Parabel:  $E = 0$





## 2. Keplersches Gesetz    Flächengesetz



$$dA = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \underbrace{\vec{v}}_{ds} dt \right|$$

$$= \frac{1}{2m} \left| \vec{r} \times \vec{p} \right| dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const}$$

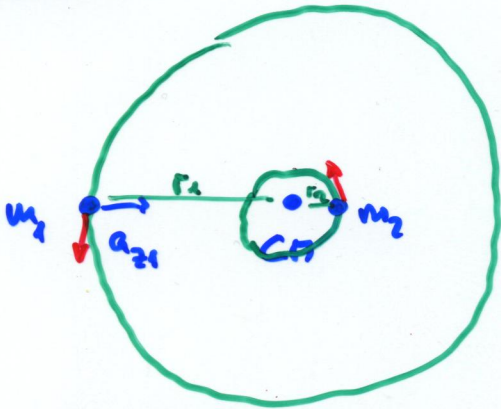
Drehimpulserhaltung

## 3. Keplersches Gesetz : Periodengesetz

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const} \Rightarrow T^2 \propto a^3$$

T = Umlaufzeit  
a = große Halbachse

Für Kreisbahnen:



$$F_1 = \frac{G m_1 \cdot m_2}{(r_1 + r_2)^2} = m_1 a_{21}$$

$$= m_1 \omega^2 r_1$$

Für  $m_2 \gg m_1$  :  $r_2 \ll r_1$

$$F = \frac{G m_2}{r_1^2} \cdot m_1 = m_1 \cdot \omega^2 r_1$$

$$\text{Mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_2} r_1^3$$

# Beispiele

## a) Geostationärer Orbit

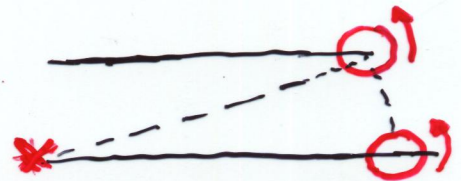
$$T = 1d \quad r = \sqrt[3]{\frac{G m_E T^2}{4\pi^2}} \quad r = 42157 \text{ km}$$

⇒ 35786 km über Erdoberfläche

- Siderealischer Tag (Periode um aus Erdrotation)

$$23^h : 56' : 4,08''$$

~ 4 min kürzer als  
synodischer Tag  
4 min  $\hat{=}$   $\frac{1}{365} d$



- Bei präzise gemessenem Satellitenradius;  
extrem präzise Bestimmung von  $G \cdot m_E = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^3$

$$G \cdot m_E = 3,98 \dots \cdot 10^{14} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}} ; \frac{\delta(G m_E)}{G m_E} \approx 10^{-9}$$

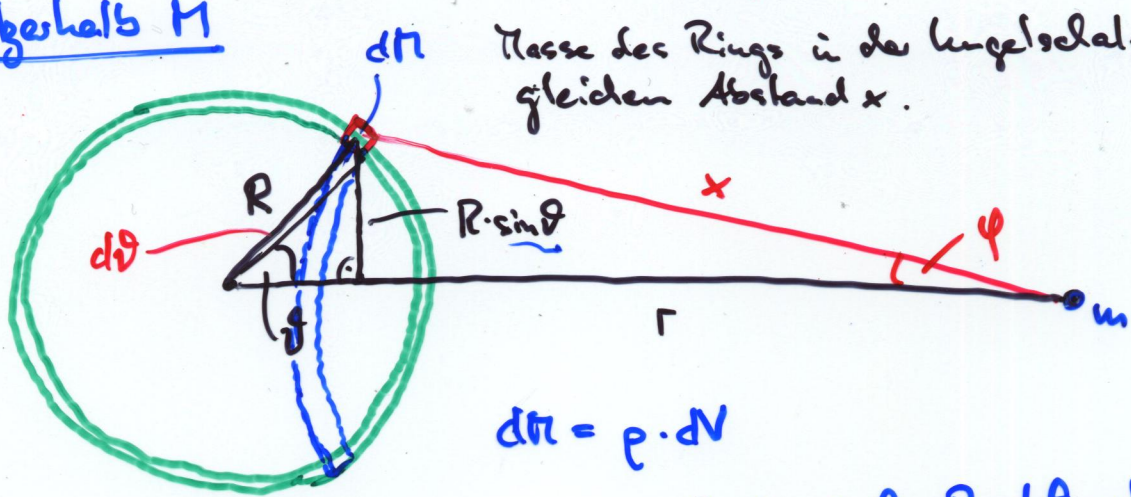
## b) Sonnenmasse

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2}{G (1a)^2} \cdot (1AE)^3 \Rightarrow 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$



### 3.5 Gravitation in Masseverteilungen

a) m außerhalb M



Masse des Rings in der Längselbene mit gleichem Abstand  $x$ .

$$dm = \rho \cdot dV$$

$$= \rho \cdot \underbrace{2\pi R \cdot \sin\theta}_{\text{Ringumfang}} \cdot \underbrace{R \cdot d\theta}_{\text{Dicke}} \cdot \underbrace{d}_{\text{Schale}}$$

$$dF_x = \frac{G \cdot m \cdot dm}{x^2}$$

$$dF = dF_x \cdot \cos\varphi$$

$$(1) \quad x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cdot \cos\theta$$

(Cosinus-Satz)

$$\Rightarrow R \cdot \cos\theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2r}$$

$$\frac{d(x^2)}{d\theta} = 2Rr \sin\theta \Rightarrow 2x dx = 2Rr \sin\theta d\theta$$

$$(2) \quad \cos\varphi = \frac{r - R \cdot \cos\theta}{x} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{r^2 - R^2 + x^2}{2rx}$$

$$F = \int_{F(r-R)}^{F(r+R)} dF = \int_{r-R}^{r+R} \frac{Gm}{x^2} \cdot \frac{r^2 - R^2 + x^2}{2rx} \cdot \rho \cdot 2\pi R^2 \underbrace{\sin\theta d\theta \cdot d}_{\frac{x dx}{r \cdot R}}$$

Definiere  $f = \frac{Gm\rho d \cdot \pi R}{r^2}$

$$= \int_{r-R}^{r+R} dx \cdot f \cdot \left( \frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) = f \cdot \left[ -\frac{r^2 - R^2}{x} + x \right]_{r-R}^{r+R}$$

$$= f \cdot \left( -\frac{(r^2 - R^2)}{(r+R)} + r+R + \frac{r^2 - R^2}{(r-R)} - r+R \right) =$$

$$= f \cdot \left( -\frac{(r^2 - R^2)(r-R)}{r^2 - R^2} + \frac{(r^2 - R^2)(r+R)}{r^2 - R^2} + 2R \right)$$

$$= f \cdot 4R$$

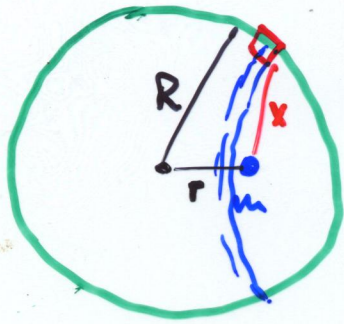
$$F = G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \underbrace{4\pi R^2 \cdot d \cdot \rho}_M = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

wie für Punktmasse  $M$   
unabhängig von der Dichte

gilt für alle kugelsymmetrischen  
Massenverteilungen



b) m innerhalb Kugelschale



$$F = \int_{R-r}^{R+r} dx f \cdot \left( \frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right)$$

$$= f \cdot \left[ -\frac{r^2 - R^2}{x} + x \right]_{R-r}^{R+r} = 0$$

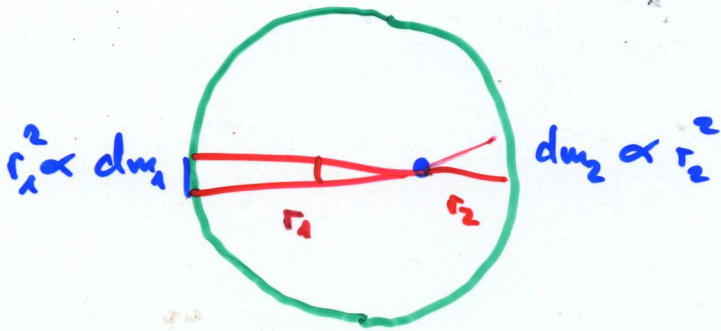
$$= f \left( -\frac{r^2 - R^2}{R+r} + R+r - \left( -\frac{r^2 - R^2}{R-r} + R-r \right) \right) =$$

$$= f \left( -\frac{(r^2 - R^2)(R-r)}{R^2 - r^2} + 2r \frac{(R+r)(R-r)}{R^2 - r^2} + \frac{(r^2 - R^2)(R+r)}{(R+r)(R-r)} \right) =$$

0



Qualitative Erklärung, warum  $\int d\vec{F} = 0$

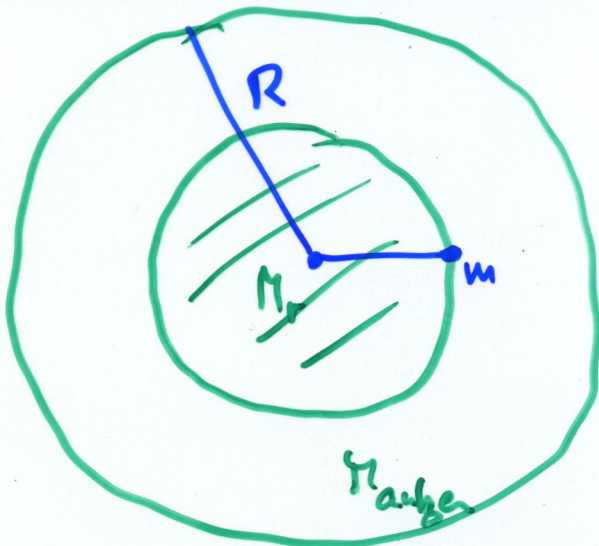


$$dm_i \propto r_i^2$$

$$d\vec{F} \propto \frac{dm_i}{r_i^2}$$

$$d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = 0$$

c) Masse innerhalb einer Vollkugel

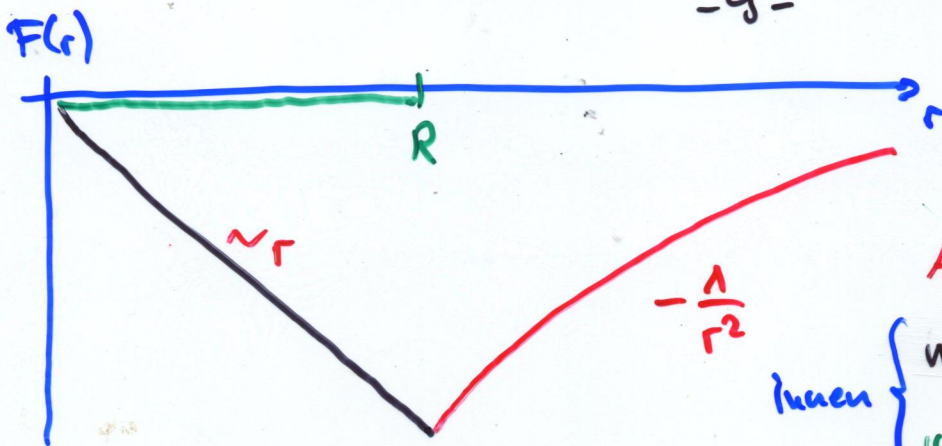


$$F(M_{\text{aussen}}, m) = 0$$

$$F(M_{\text{innen}}, m) = \frac{G M_{\text{innen}} \cdot m}{r^2}$$

Mit  $M_{\text{innen}} = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$

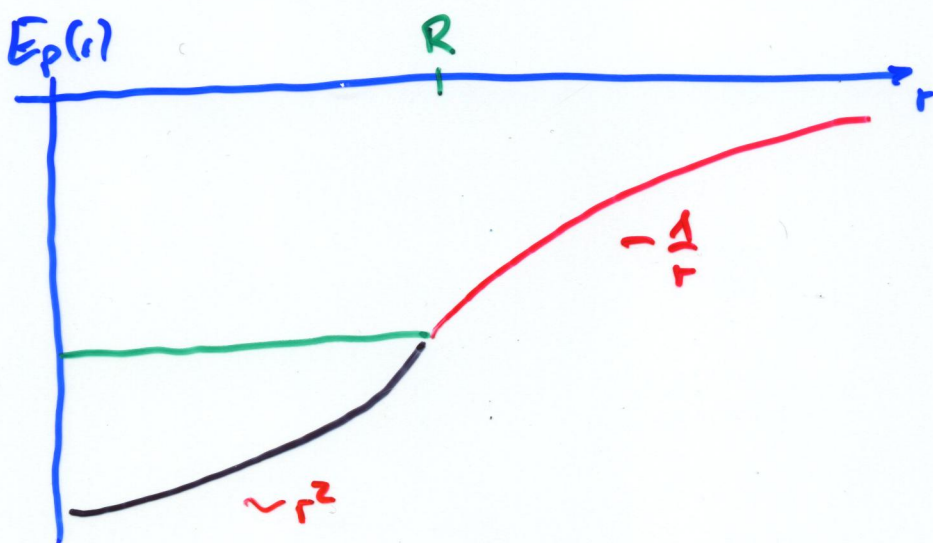
$$F(M_{\text{innen}}, m) = \frac{4}{3} \pi G \rho m r$$



Außen:  $\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_R$

innen:  $F_G = -G \frac{4}{3} \pi \rho r^3$

Hohlkugel:  $\vec{F} = 0$

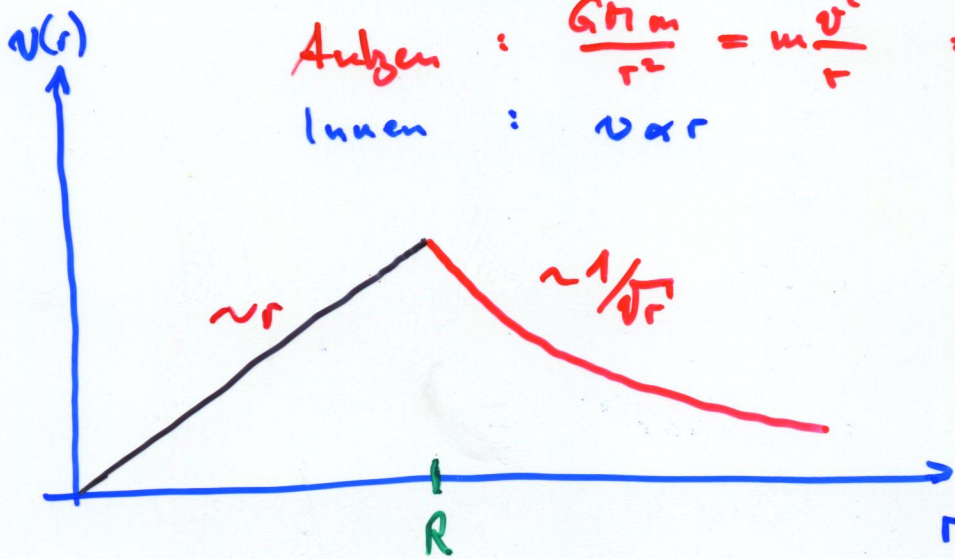


v tangential: Zentripetalkraft

Außen:  $\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow$

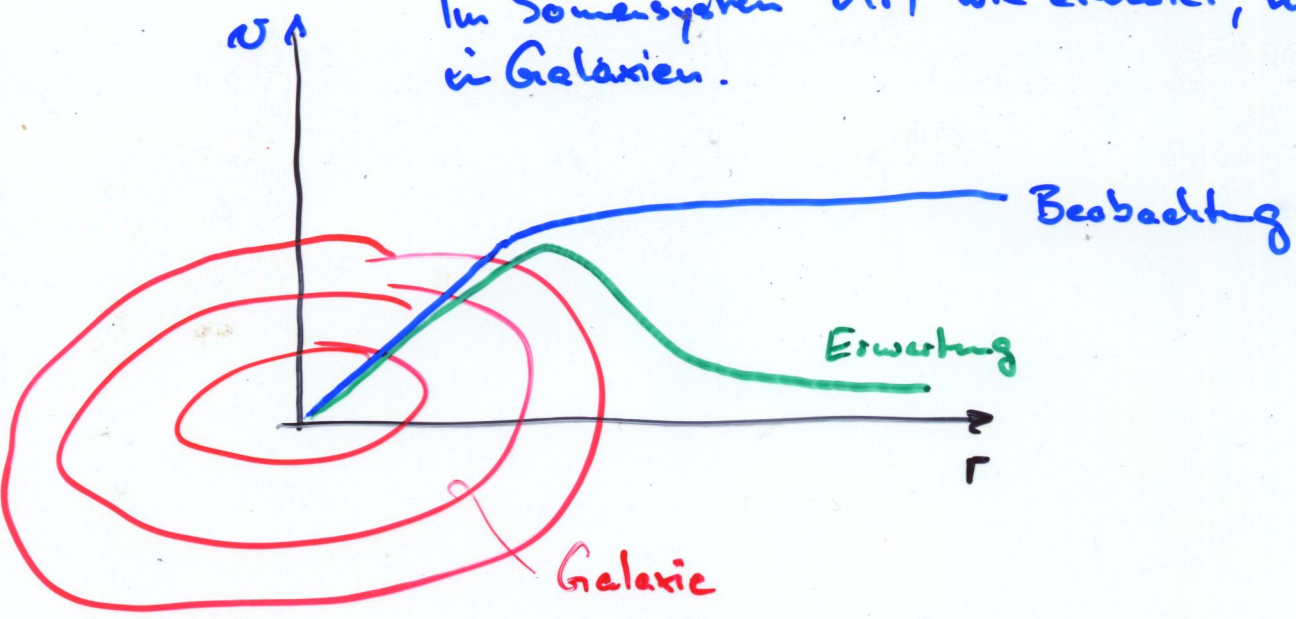
$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$

innen:  $v \propto r$





Im Sonnensystem  $v(r)$  wie erwartet, nicht aber in Galaxien.



Mögliche Erklärung:

Zusätzliche Dunkle Materie

$$M_{\bullet} \sim 5 \times M_{\text{Sterne}}$$

Kandidaten für dunkle Materie:

- Supersymmetrische Teilchen
- Schwere Neutrinos
- WIMPs (weakly interacting massive particles)
- Axionen

# Dunkle Materie ?

