Zusammenfassung

- L.T. liefert Vorschrift so, daß c in allen Systemen gleich

  Für $v \ll c \rightarrow \gamma = 1$: Galilei-Transf.

- Minkowski-Diagramm.

  Ereignis $(ct, \vec{x})$, Weltlinie, Ereignishorizont

  - In S erscheinen Koordinaten von S', x' <u>und</u> t', geneigt.
  - $t \neq t'$

4.2.2. Relativistische Effekte

1) Zeitdilatation (Dehnung) $\quad T = \gamma \cdot T'$

   - Zeit T (aus Sicht von S) ist verlängert gegenüber Zeit T' (aus Sicht von bewegtem System S').

   - Diskussion: Myonen aus kosmischer Höhenstrahlung

2) Längenkontraktion $\quad L = \frac{1}{\gamma} L'$

   - Abstand L (aus Sicht von S) ist verkürzt gegenüber Abstand L' (aus Sicht von bewegtem System S').

3) Addition von Geschwindigkeiten Für: $\overset{u}{\longleftarrow} \; \overset{v}{\longrightarrow}$

   - $$u' = -\frac{u+v}{1+\frac{u \cdot v}{c^2}} \qquad v, u', u \leq c$$

4.) Relativistischer Doppler-Effekt

- **Akustik**:

Schallgeschwindigkeit

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v-u)T} = \nu \cdot \frac{1}{1-u/v}$$

Frequenz erhöht sich (bei Annäherung)

- **Bei Licht**: Quelle $\xrightarrow{u}$ Beobachter   Q läuft auf B zu

B mißt: N Wellenberge in Δt_B

Wellenlänge $\lambda_B = \dfrac{c\,\Delta t_B - u\,\Delta t_B}{N} = \dfrac{(c-u)}{N} \cdot \Delta t_B$

Frequenz $\nu_B = \dfrac{c}{\lambda_B} =$

Q mißt: $N = \nu_Q \cdot \Delta t_Q$ $N_Q = N_B = N$

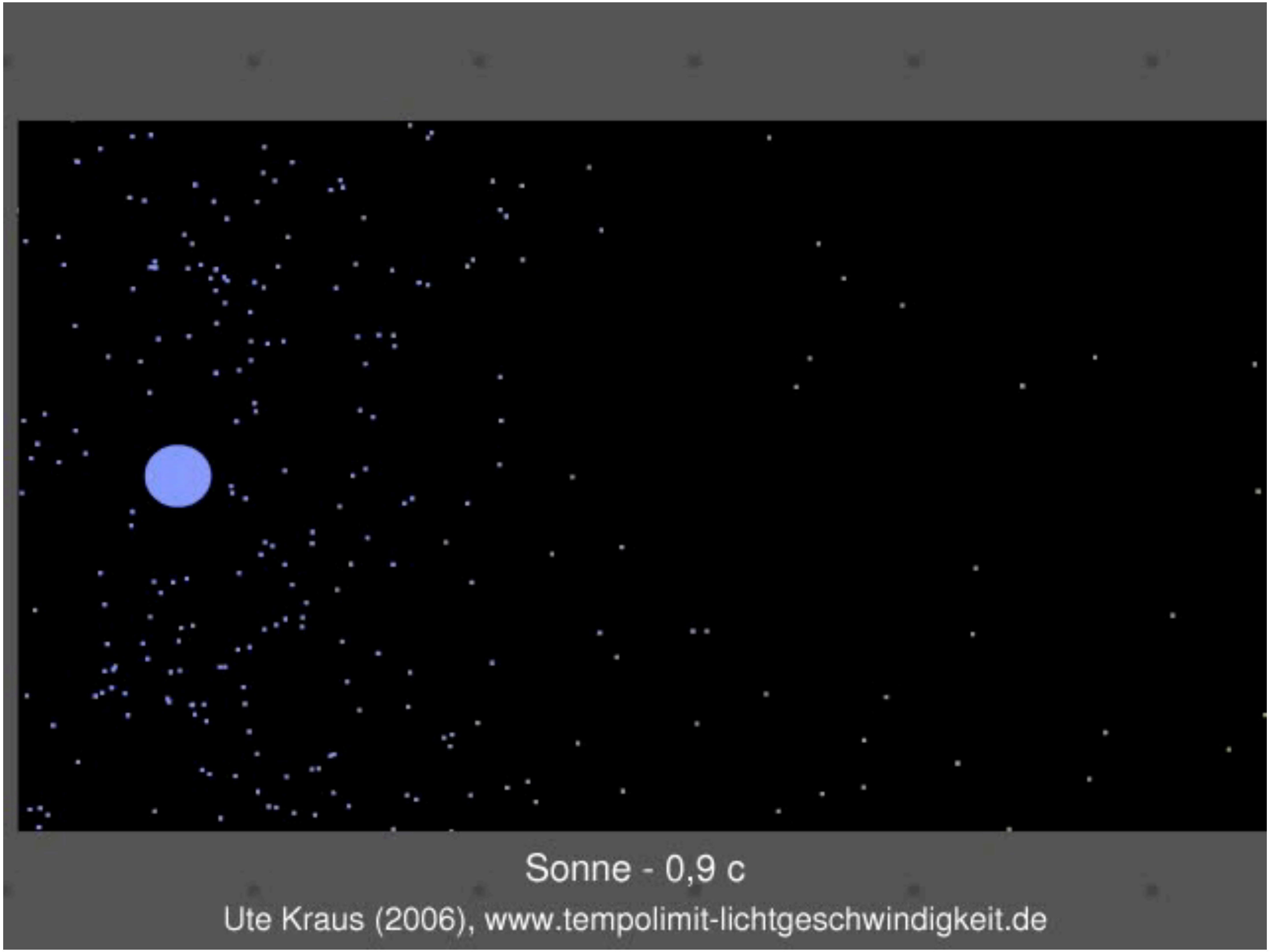
Zeitdilatation: $\Delta t_B = \gamma \cdot \Delta t_Q$

$$\nu_B = \nu_Q \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

Frequenz erhöht sich (bei Annäherung)

$\Rightarrow$ „Rotverschiebung" bei Entfernung

Relativistischer Dopplereffekt

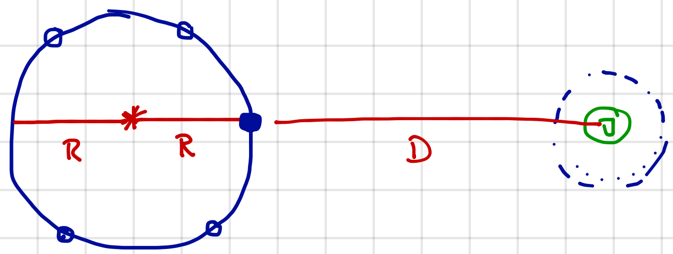


Bewegte Lichtquelle ändert Farbe und Intensität
(Blauverschiebung bei Annäherung, Rotverschiebung bei Entfernung)

4.2.3 Bestimmung von c

- Historische Kontroverse 1. Messung: O. Römer 1675

Allgemeine Annahme: $c = \infty$



Zeitpunkte der Abdeckung eines Jupitermondes

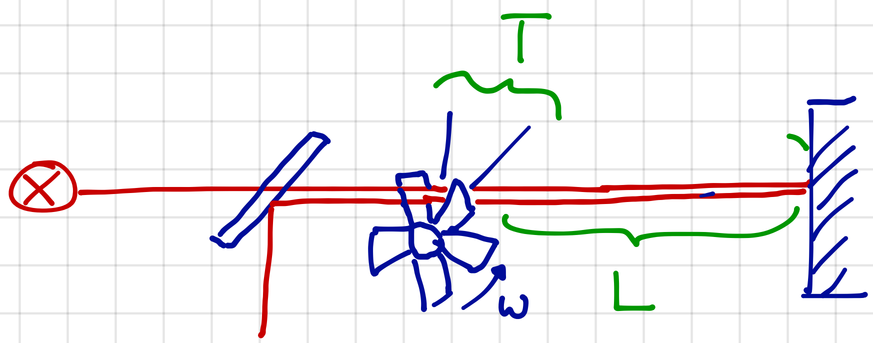
Messungen zu verschiedenen Jahreszeiten:

Beobachtung: $\Delta t = 15$ min

$$\frac{2R}{\Delta t} = c = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ km}}{10^3 \text{ s}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Römer: $c \approx 200\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}} < \infty$

- Genaue Bestimmung: Fizeau 1849:



Bestimme Drehzahl, bei der zurückgespiegeltes Licht gerade vollständig vom nächsten Zahn abgedeckt wird:

Bei N Zähnen und Drehzahl ω $\quad 2NT = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f_Z} \qquad c = \frac{2L}{T}$

Fizeau : $N = 720$ Zähne

$f_z = 12{,}6\ \text{Hz}$

$L = 2 \cdot 8{,}633\ \text{km}$

$$T = \frac{1}{f_z \cdot 1440} = 5{,}5 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$$

$$c = L/T = 3{,}15 \cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Moderne Methoden zur Messung der Lichtgeschwindigkeit

    – Interferometrie mit Laser

    $\Rightarrow$ größte Unsicherheit : Längenbestimmung

- heute: (seit 1983) $c = 299\,792\,458\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ <u>Definition</u>

$c \propto L \cdot \nu$

präzise meßbar

eher ungenau

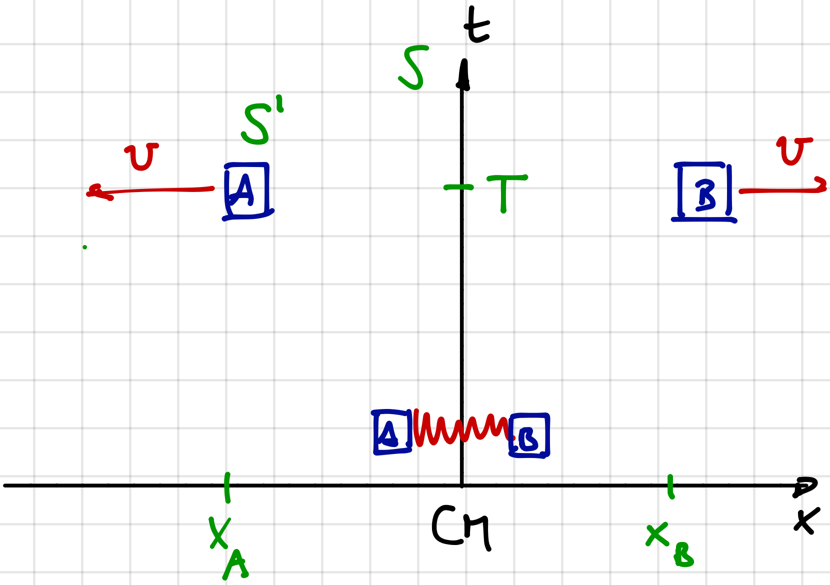
$\Rightarrow$ Festlegung von c $\Rightarrow$ Präzision der Frequenzmessung auch für Längenmessung verfügbar.

4.3. Relativistische Dynamik

4.3.1 Masse, Impuls, Kraft, Energie

1. Masse

Elastischer Stoß: $S(t=0) = S'(t'=0)$



$m_A = m_B$

CM ruht in S

Betrachtung von A aus:

- S bewegt sich mit v nach rechts
- B bewegt sich mit $w = \dfrac{v+v}{1+\frac{v\cdot v}{c^2}} = \dfrac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$ nach rechts
- Nach $T = \Delta t_A$ hat sich S um $T \cdot v$ entfernt
- Nach $T = \Delta t_A$ hat sich B um $T \cdot w$ entfernt, $w < 2v$

↳ Schwerpunkt nicht mehr in der Mitte zwischen A und B ?

↳ Ausgleich: Masse von B vergrößert sich, $m_B' > m_B$, dann kann Masse × Abstand konstant bleiben.

Berechne Schwerpunkt (CM) aus Sicht von A:

$$\text{CM}: \quad -m_A \cdot \underbrace{v \cdot T}_{\overline{AS}} + m_B' \cdot \underbrace{(w-v)\,T}_{\overline{SB}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_B' = m_A \cdot \frac{v}{w-v}$$

$$= m_A \frac{v}{\frac{2v}{1+v^2/c^2} - v} = \frac{v}{\frac{c^2\left(2v - v\left(1+v^2/c^2\right)\right)}{c^2\left(1+v^2/c^2\right)}} =$$

$$= m_A \cdot \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}$$

$$= m_A \cdot \sqrt{\frac{(c^2+v^2)^2}{c^4+2c^2v^2+v^4-4c^2v^2}}$$

Mit $w = \frac{2vc^2}{c^2+v^2} \Rightarrow 4v^2c^2 = w^2/c^2 \, (c^2+v^2)^2$

$$= m_A \cdot \sqrt{\frac{1}{1-\frac{w^2}{c^2}}}$$

$$= m_A \cdot \gamma$$

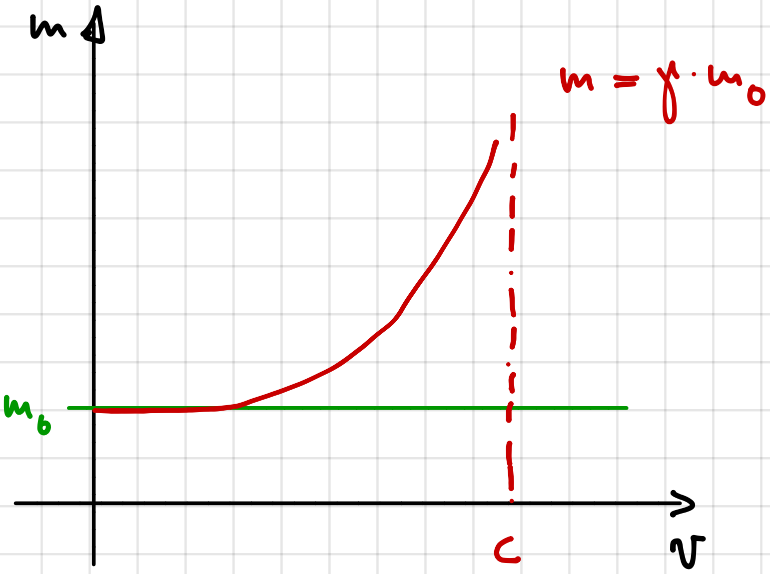
$$= m_B \cdot \gamma$$

$m_A = m_B$
nach Voraussetzung

$$\boxed{m = \gamma m_0}$$

m_0: Ruhemasse

m : Masse von bewegtem System



Anwendung an Teilchenbeschleunigern:

Beispiel LEP (CERN 1990–2000)

Elektronen: $m_0 = 5 \cdot 10^5$ eV

$m = 100$ GeV

$\gamma = 200000$

2. Impuls

$p = m \cdot v \rightarrow \boxed{p = \gamma m_0 v} = m(v) \cdot v$

$p \rightarrow \infty$ für $v \rightarrow c$

3. Kraft

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m_0 \vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{}}\right)\cdot\vec{v} + \frac{m_0}{\sqrt{}}\cdot\vec{a}$$

$$= \gamma^3 \cdot m_0 \cdot a \cdot \left(\frac{v^2}{c^2}\,\vec{e}_v + \frac{1}{\gamma^2}\cdot\vec{e}_a\right)$$

4. Energie

$$E_{kin} = \int \vec{F}\, d\vec{s} = \int \frac{dp}{dt}\, ds$$

hier: $\vec{F} \parallel d\vec{s}$
$\vec{v} \parallel d\vec{s}$

$$= \int_0^v v\, dp$$

$$= \int_0^v v\, d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

$\frac{d}{dv}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$ bilden, $m_0 = \text{const.}$

$$= \int_0^v v\, m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv$$

$$= m_0 c^2 \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{\gamma} - 1\right)$$

$$E_{KIN} = m_0 c^2 (\gamma - 1) = \underbrace{m_0 c^2 \gamma}_{\substack{\text{Gesamtenergie} \\ (v\text{-abhängig})}} - \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Ruhenergie}}$$

Gesamtenergie

$$\boxed{E = \gamma m_0 c^2 = mc^2} = E_{KIN} + m_0 c^2$$

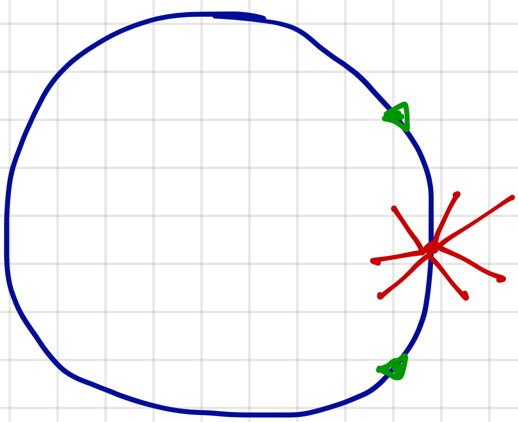
Klassischer Grenzfall:

Für $v \ll c$: $\quad \gamma \approx 1 + \frac{1}{2} v^2/c^2$

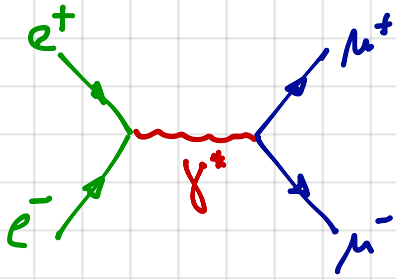
$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \ldots$
Binomische Reihe

$$E_K = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$
$$= \frac{m_0 c^2}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$
$$= \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Anwendung: Umwandlung von Kinetischer Energie in Masse



Neue Teilchen aus Energie



$$E = \gamma m_0 c^2$$

$$E^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^2 (v^2 - v^2 + c^2)}{1 - v^2/c^2}$$

$$= p^2 c^2 + \frac{m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$m_0^2 c^4 = \underbrace{E^2 - p^2 c^2}$$

Lorentz-Invariant, d.h. ändert sich nicht unter Lorentz-Transformation

4.3.2. 4-Vektoren u. Lorentzinvarianz

3 Komponenten

4-Vektor: $x = x_\mu = (x_0, \vec{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

4 Komponenten

mit $x_0 = ct$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

Lorentztransformation:

$$x_1' = \gamma (x_1 - vt)$$

$$x_2' = x_2$$

$$x_3' = x_3$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v x_1}{c^2}\right) \longrightarrow ct' = \gamma \cdot \left(ct - \boxed{\frac{v}{c}} x_1\right)$$

$= \beta$

$$x' = x'_\mu = L \cdot x_\mu \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

"Zeile mal Spalte"

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \gamma\beta x_1 \\ -\gamma\beta ct + \gamma x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lorentzinvarianz:

$$x'^2 = c^2t'^2 - |\vec{x}'|^2 \qquad = c^2t^2 - |\vec{x}|^2$$

$$= c^2t'^2 - (x_1'^2 + \underbrace{x_2'^2 + x_3'^2}_{= x_2^2 + x_3^2,\ \text{da } x_2' = x_2 \text{ u. } x_3' = x_3})$$

... (Einsetzen der L.T. für ct' und x_1)

$$= c^2t^2 - |\vec{x}|$$

4-Impuls

$$p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \qquad \text{4-Impuls}$$

$$p^2 = E^2/c^2 - |\vec{p}|^2$$

Minuszeichen

"Minkowski-Metrik"

Vierer-Abstand ist Lorentzinvariant

analog zu Längeninv. von 3-Vektoren bei Galilei-Transformationen

4.3.3. Kurzer Überblick: Allg. Relativitätstheorie

Ausgangspunkt: $m_{schwer} = m_{träge}$

Gravitation ↗ m_{schwer}, Beschleunigung ↗ $m_{träge}$

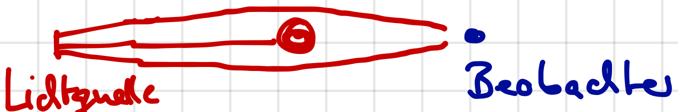
Äquivalenzprinzip

Homogenes Schwerefeld (kann nur lokal homogen sein) → Transformation in Inertialsystem durch passende Beschleunigung

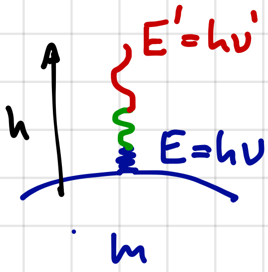
Global: Krümmung der Raum-Zeit durch Masse

Konsequenzen: (Experimentell bestätigt)

- Lichtablenkung im Gravitationsfeld

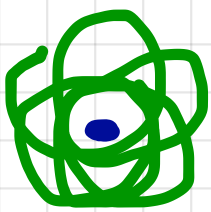


- Rotverschiebung



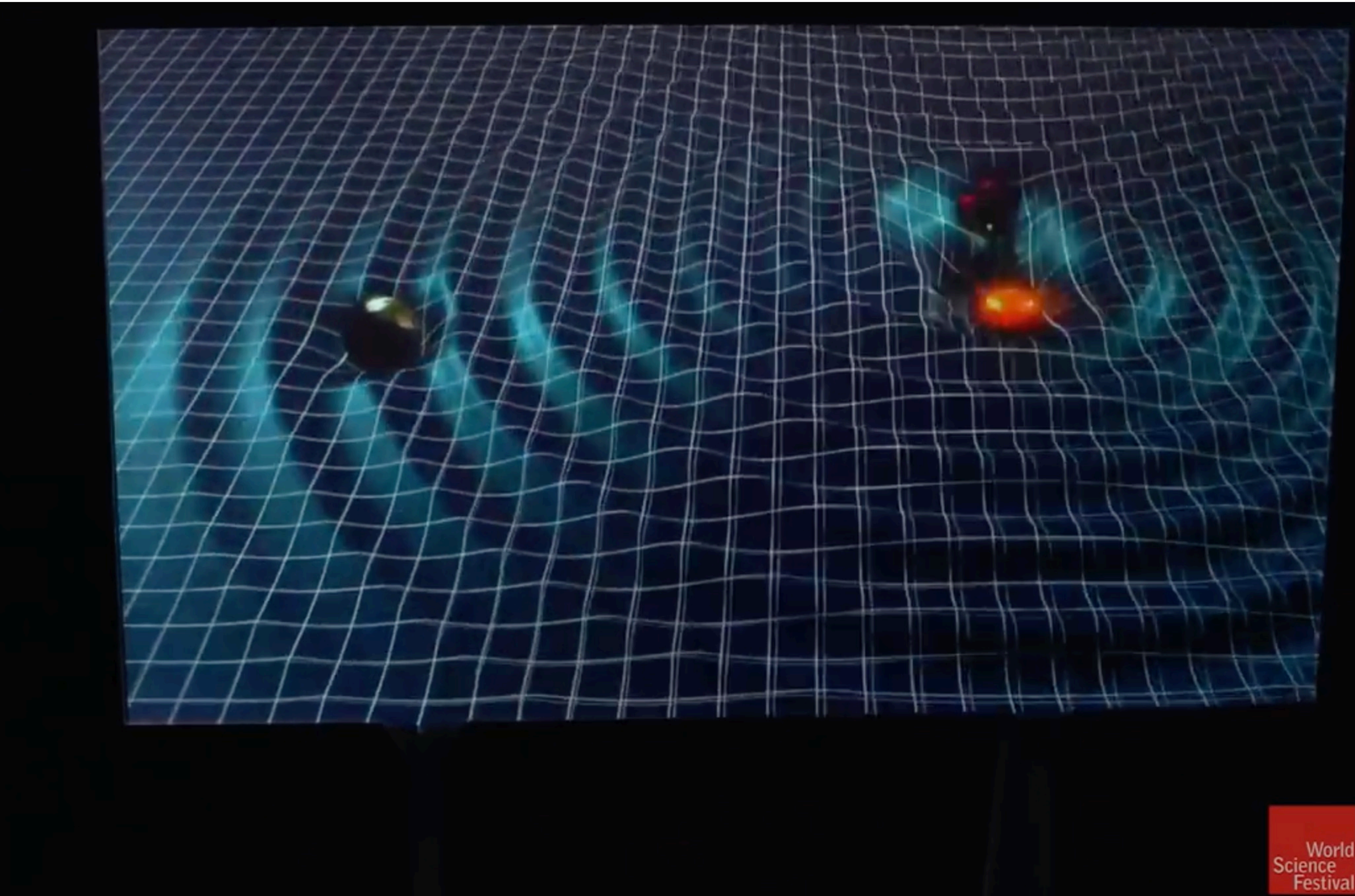
Uhr im Gravitationsfeld
$\Rightarrow$ beschleunigt → Zeitdilatation
$\Rightarrow \nu' < \nu$

- Periheldrehung des Merkur



- Gravitationswellen
  (LIGO-Experiment 2016)
  https://www.ligo.caltech.edu

2016: Nachweis von Gravitationswellen am LIGO Experiment: https://www.ligo.caltech.edu/



https://www.youtube.com/watch?v=s06_jRK939I