Experimentelle Physik I
WS 16/17

Veranstaltung 4010011
https://campus.studium.kit.edu/event/H7Ke2neVDU6OCIWVculqYw

PD Dr. Andreas B. Meyer (KIT und DESY)

25. Vorlesung: 6.1 Schwingungen und Wellen (2): Schwingungen

26. Januar 2017

Karlsruher Institut für Technologie

Zusammenfassung

5.3. Thermische Eigenschaften

1) thermische Ausdehnung

$$\boxed{\frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T}$$

linearer Ausdehnungskoeffizient

2) Wärmeleitung

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}}$$

thermische Leitfähigkeit

6. Schwingungen und Wellen

6.1. Schwingungen

6.1.1. Federschwingungen

a) ungedämpft

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Für $x(0) = A$ und $\dot{x}(0) = 0$ $\quad \varphi = 0$

b) gedämpft

Bewegungsglg.: $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$

Homogene DGL, d.h. keine konstanten Terme

Ansatz: $x(t) = x_0 \cdot e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$ Charakteristische Gleichung

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}}$$

Definiere: $\gamma = \frac{b}{2m}$ und $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 \cdot e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\, t}\right)$$

Fallunterscheidungen

1) $b = 0$ keine Dämpfung (siehe oben)

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2) $b < \sqrt{4mk}$ Dämpfung schwach

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{-\omega^2} = -\gamma \pm i\omega$$

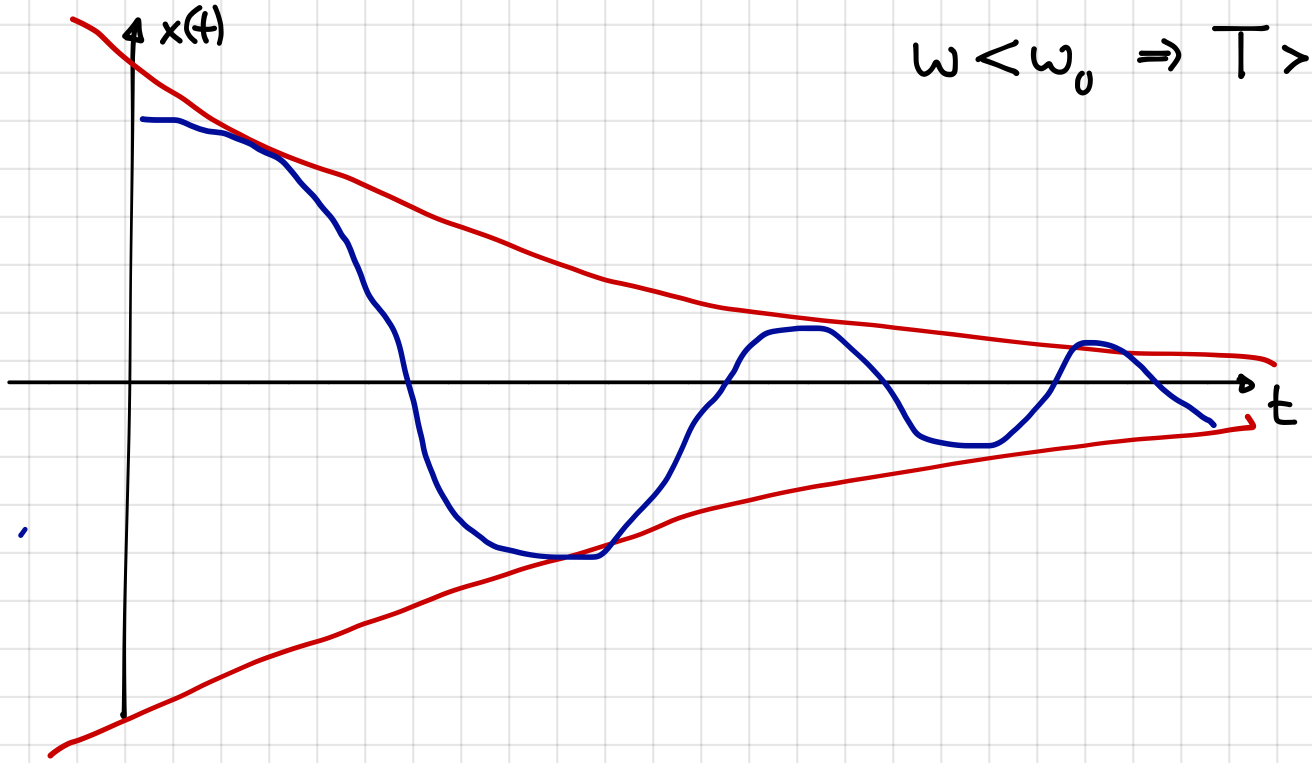
$$x(t) = e^{-\gamma t} \cdot \left(c e^{i\omega t} + c^* e^{-i\omega t} \right)$$

$x(t)$ reell $\Rightarrow$ $c_1 = c_2^* = c$

$$= A \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$A = 2|c|$

Für $x(0) = A$ $\dot{x}(0) = 0 \rightarrow \varphi = 0$



$\omega < \omega_0 \Rightarrow T > T_0$

3) $b = \sqrt{4mk}$: "aperiodischer Grenzfall"

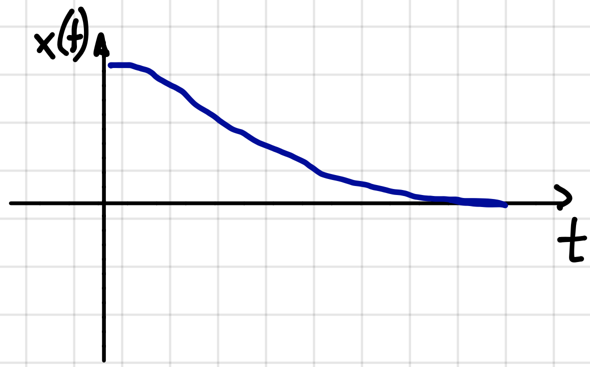
$$\omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\gamma$$

$$x(t) = C(t) \cdot e^{\lambda t}$$ (zwei Integrationskonstanten)

$$x(t) = (c_1 t + c_2) \cdot e^{-\gamma t}$$

Für $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = A \cdot (1 + \gamma t) \cdot e^{-\gamma t}$$



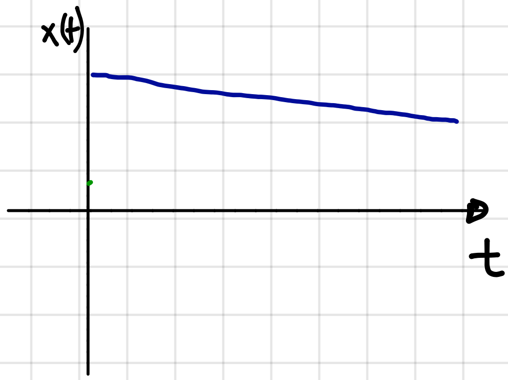
4) $b > \sqrt{4mk}$: Kriechfall

$\gamma > \omega_0$ $\qquad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ reell

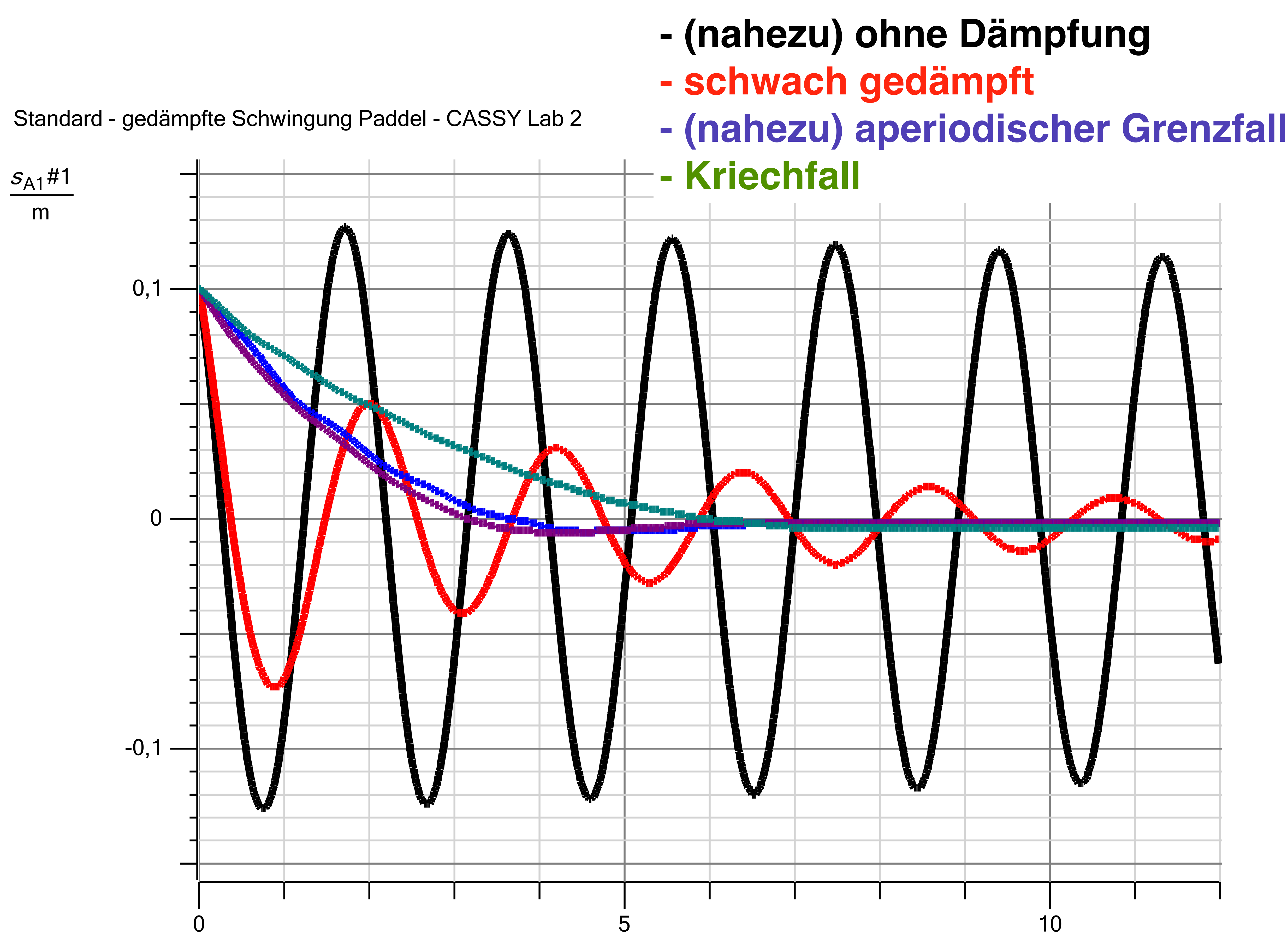
$$x(t) = e^{-\gamma t} \cdot (c_1 \cdot e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t})$$

Für $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = \frac{A}{\alpha} \cdot e^{-\gamma t} \left[\alpha \cdot \cosh(\alpha t) + \gamma \sinh(\alpha t)\right]$$

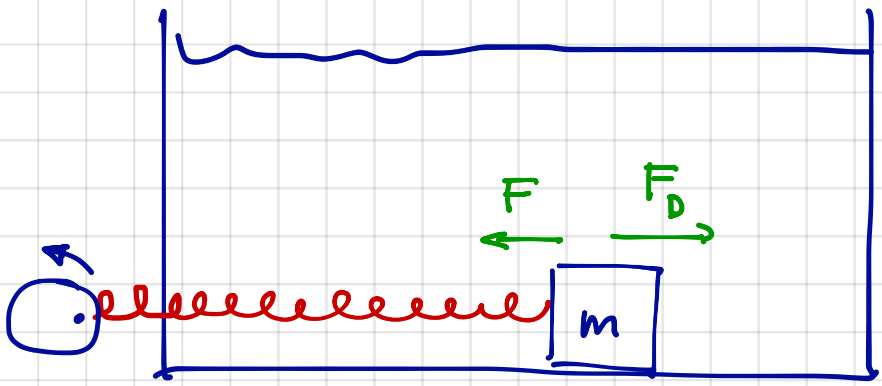


$\Longrightarrow$ Versuch Pendel



Bemerke: $\omega_{schwach} < \omega_{ohne}$

c) Erzwungene Schwingungen



Periodische Anregung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cdot \cos\omega t$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cdot\cos\omega t$$

mit $\gamma = \frac{b}{2m}\left(=\frac{1}{\tau}\right)$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Lösung: Kombination der allgemeinen Lösung der homogenen DGL mit einer speziellen Lsg. der inhomogenen DGL

Schwache Dämpfung:

$$x(t) = \underbrace{x_1 \cdot e^{-\gamma t}\cdot\cos(\omega_1 t + \varphi_1)}_{\text{homog. Lsg.}} + \underbrace{x_2\cos(\omega t + \varphi_2)}_{\text{inhomog. für } t \gg \tau}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

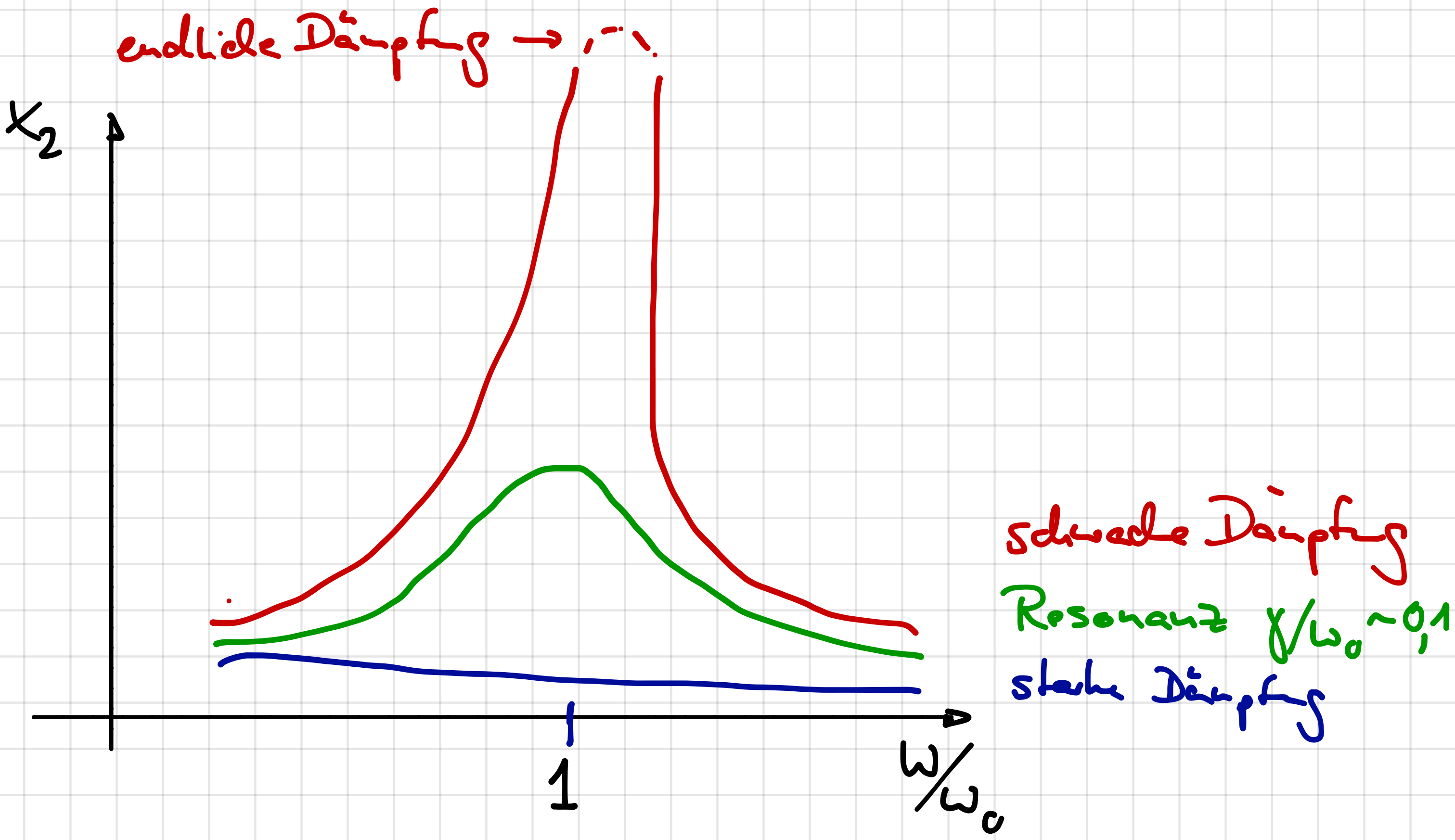
Im Limit $t \to \infty$ wird System nur noch von Anregung getrieben

$\Rightarrow \cos(\omega t + \varphi)$

Amplitude:

$$\boxed{x_2 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_1^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}}$$

Schwingung aus Anfangsbedingung abgeklungen
⇒ "stationäre" Lösung



Position der Resonanzfrequenz ω_{res}:

$$\frac{dx_2(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_{res} = \omega_0 \cdot \sqrt{1-\frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}}}$$

abhängig von Dämpfung γ
$\gamma_1 > \gamma_2 \Rightarrow \omega_1 < \omega_2$

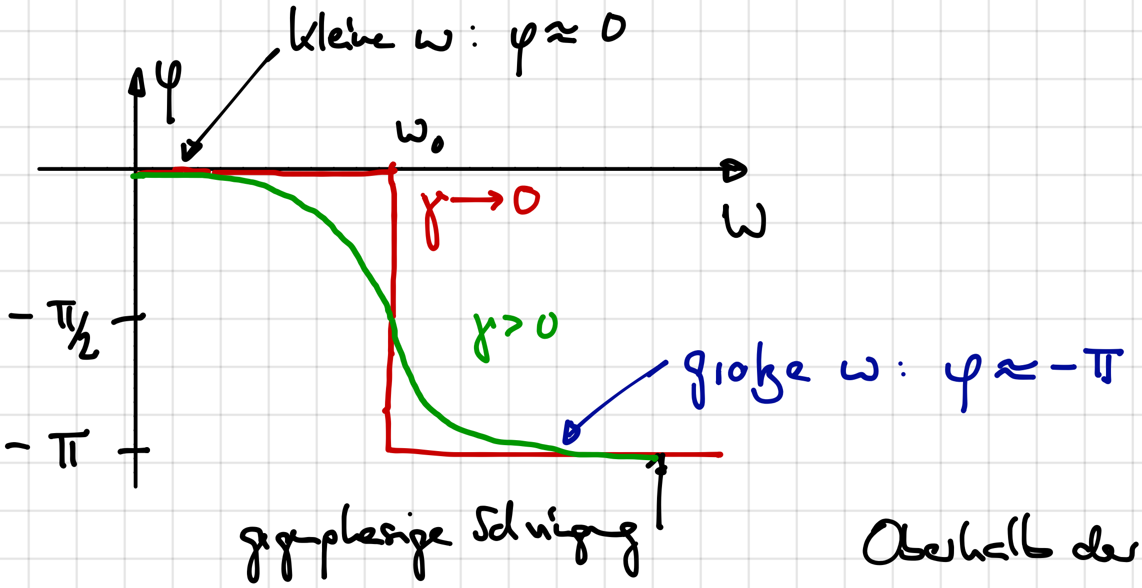
Phase:

$$\boxed{\tan \varphi_2 = - \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

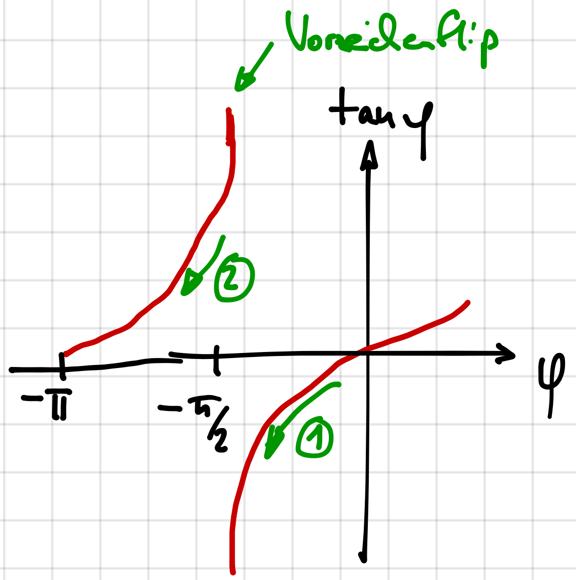
− solange $\omega < \omega_0$

Vorzeichenänderung:

+ wenn $\omega > \omega_0$



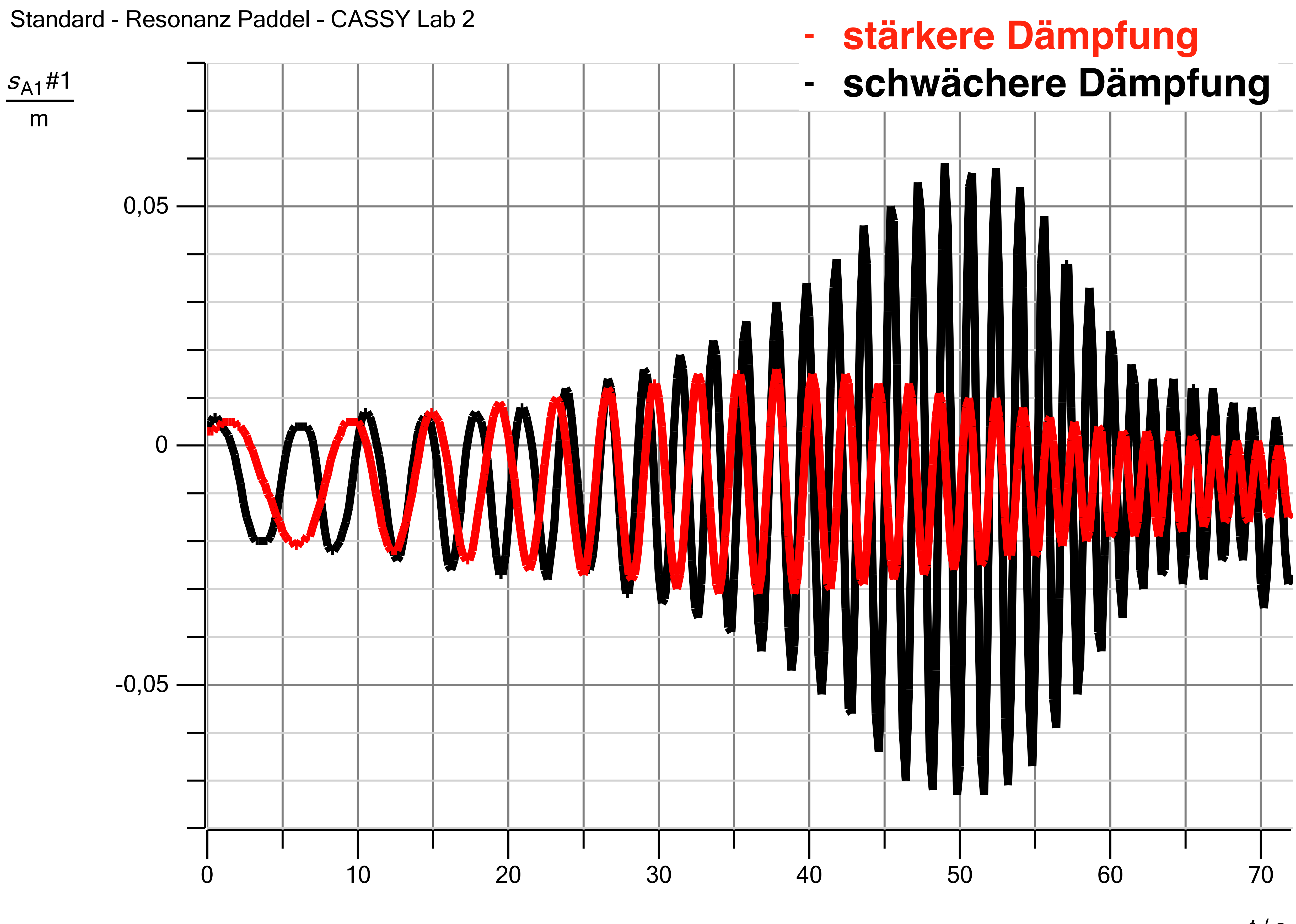
Oberhalb der Resonanz:
Negative Phase,
d.h. Schwingung hinkt
der Anregung nach



⇒ Versuch Pohlsches Rad

⇒ Versuch Pendel

→ Versuch Unwucht

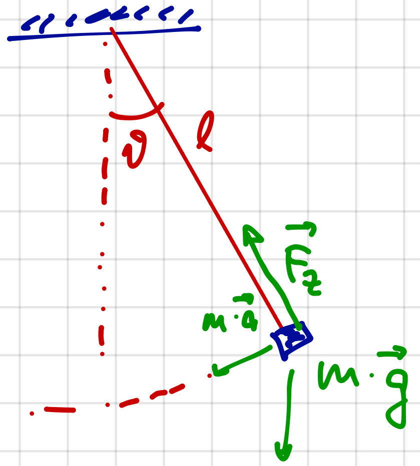


Bemerke: $\omega_{\text{res, stärker}} < \omega_{\text{res, schwächer}}$

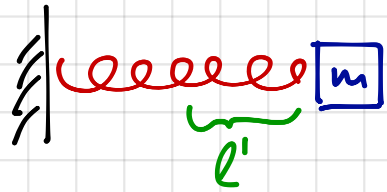
6.1.2 Pendel

a) Mathematisches Pendel

Pendel



Feder



$$m \cdot g \cdot \sin\vartheta = m \cdot a$$
$$= m \cdot \ell \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$k \cdot \ell' = m \cdot a$$

Näherung für kleine ϑ: $\sin\vartheta \approx \vartheta$

$$m \cdot g \cdot \vartheta = m \cdot \ell \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

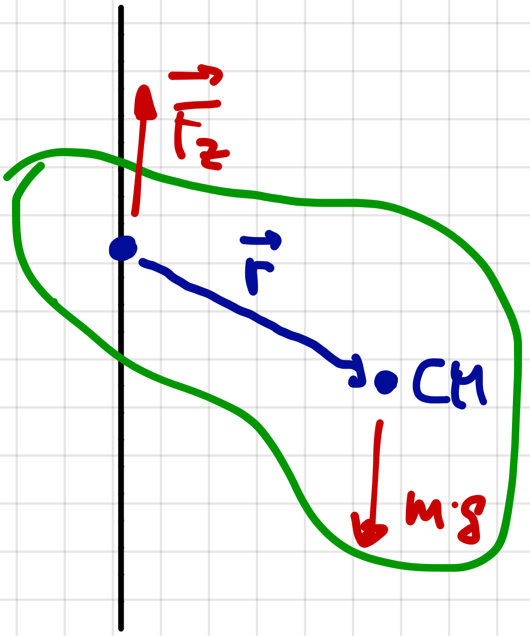
$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot \cos\omega t \qquad \omega_P = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \omega_F = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Für $\ell = \ell'$, $\omega_P = \omega_F$: $\quad \frac{g}{\ell'} = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow k \cdot \ell' = m g$

Kraft zur Federdehnung entspricht Gewichtskraft

b) Physikalisches Pendel

Starrer Körper (mit Ausdehnung), der außerhalb seines CM drehbar gelagert ist.



Kräfte: $\vec{F}_z + m\vec{g} = 0$

keine Beschleunigung

Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g} = J\cdot\vec{\alpha}$

$$M = -r\cdot m\cdot g\cdot \underbrace{\sin\vartheta}_{\approx\vartheta} = J\cdot\frac{d^2\vartheta}{dt}$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0\cdot\cos\sqrt{\frac{rmg}{J}}\cdot t$$

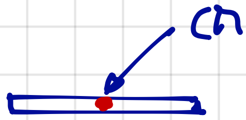
Beispiele:

1) m konzentriert in CM:

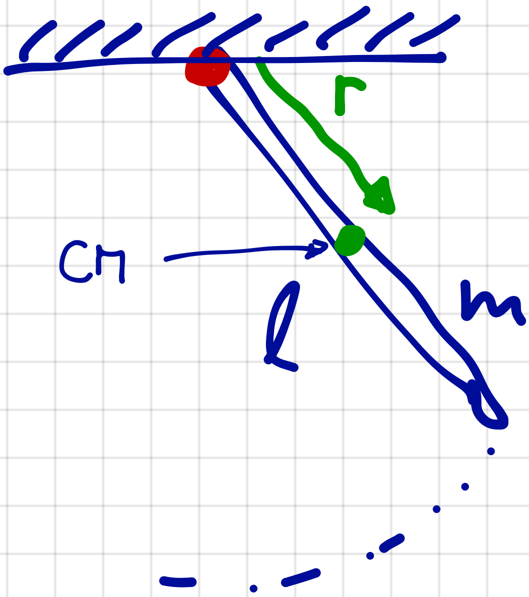
$$J = mr^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgr}{mr^2}} = \sqrt{\frac{g}{r}} \qquad \text{(Math. Pendel)}$$

2) homogener Stab:

Erinnerung: $J = \frac{1}{12} m \ell^2$



Steinerscher Satz



$$J = \underbrace{\frac{1}{12} m \ell^2 + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}_{} =$$

$$= \frac{1}{12} m \ell^2 + \frac{3}{12} m \ell^2$$

$$= \frac{1}{3} m \ell^2$$

$$= \frac{1}{3} m (2r)^2 = \frac{4}{3} m r^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{\frac{4}{3} mr^2}} = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{g}{r}}$$