

# Experimentelle Physik I

## WS 16/17

Veranstaltung 4010011

<https://campus.studium.kit.edu/event/H7Ke2neVDU6OCiWVculqYw>

PD Dr. Andreas B. Meyer (KIT und DESY)

**26. Vorlesung:**

**6.2 Schwingungen und Wellen (3): Gekoppelte Schwingungen und Wellen**

# Zusammenfassung

## 6.1.1. Federschwingungen

- Mit Dämpfungsterm:  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Ansatz:  $x(t) = x_0 \cdot e^{\lambda t}$

Anfangsbedingung:  $x(0) = A$  und  $\dot{x}(0) = 0$

1.)  $b = 0$   $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$

mit  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

2.)  $b < \sqrt{4mk}$   $x(t) = A \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

mit  $\gamma = \frac{b}{2m}$ ;  $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

$\Rightarrow \omega < \omega_0$

3.)  $b = \sqrt{4mk}$   $x(t) = A \cdot (1 + \gamma t) \cdot e^{-\gamma t}$

$\Rightarrow$  keine Oszillation

4.)  $b > \sqrt{4mk}$   $x(t) = \frac{A}{\alpha} \cdot e^{-\gamma t} \cdot [\alpha \cdot \cosh(\alpha t) + \gamma \cdot \sinh(\alpha t)]$

$\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  reell

# Erzwungene Schwingungen

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Schwache Dämpfung  $b < \sqrt{4km}$ :

$$x(t) = \underbrace{x_1 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)}_{\text{Lösung der homog. DGL}} + \underbrace{x_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)}_{\text{Lsg der inhomog. DGL}}$$

Lösung der homog. DGL Lsg der inhomog. DGL  
für  $t \rightarrow \infty \Rightarrow \tau = \frac{1}{\gamma}$

Amplitude: 
$$x_2(\omega) = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

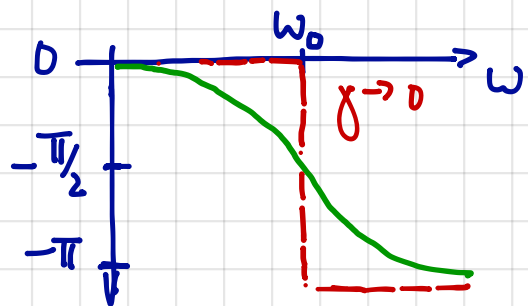
Position  
des Maximums

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}}$$

Größere Dämpfung  $\Rightarrow$  kleineres  $\omega_{\text{res}}$

Phase

$$\varphi_2 = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



Negative Phase

oberhalb der Resonanz  $\rightarrow -\pi$

## 6.1.2. Pendel

### Physikalisches Pendel

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot \cos \sqrt{\frac{r \cdot m \cdot g}{J}} \cdot t$$

# Tacoma Narrows Bridge (Washington State, USA)

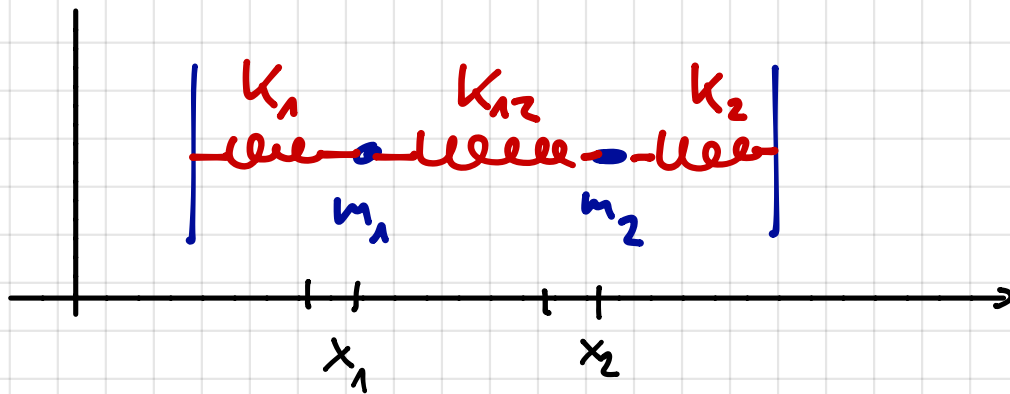
7 Nov 1940



<https://www.youtube.com/watch?v=NHJsmIfcyxs>

## 6.1.3 Gekoppelte Schwingungen

### Gekoppeltes Fedensystem



$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_{12} (x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_{12} (x_2 - x_1) \quad (2)$$

Spezialfall:  $m_1 = m_2 = m$      $k_1 = k_2 = k$

Addition von (1) und (2)

$$m \cdot (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k \cdot (x_1 + x_2)$$

Subtraktion von (1) u. (2)

$$m \cdot (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k \cdot (x_1 - x_2) - 2k_{12} (x_1 - x_2)$$

Ansatz: Mittlere Auslenkung

$$x_M := \frac{1}{2} (x_1 + x_2) = A_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Differenz

$$x_D := \frac{1}{2} (x_1 - x_2) = A_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}$$

## Fallbetrachtungen

a) Massen  $m_1$  und  $m_2$  ( $=m$ )

schwingen in Phase ( $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = 0$ )

$$x_n(t) = x_1(t) = x_2(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

$$x_D(t) = 0$$

b) Massen schwingen entgegengesetzt

$$x_n(t) = 0$$

$$x_D(t) = x_1(t) = -x_2(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k+2k_n}{m}} \cdot t\right)$$

↖ Gegenphase

c)  $x_1(0) = A$  ;  $x_2(0) = 0$

$$x_1(t) = x_n(t) + x_D(t)$$

$$= A_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot (\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

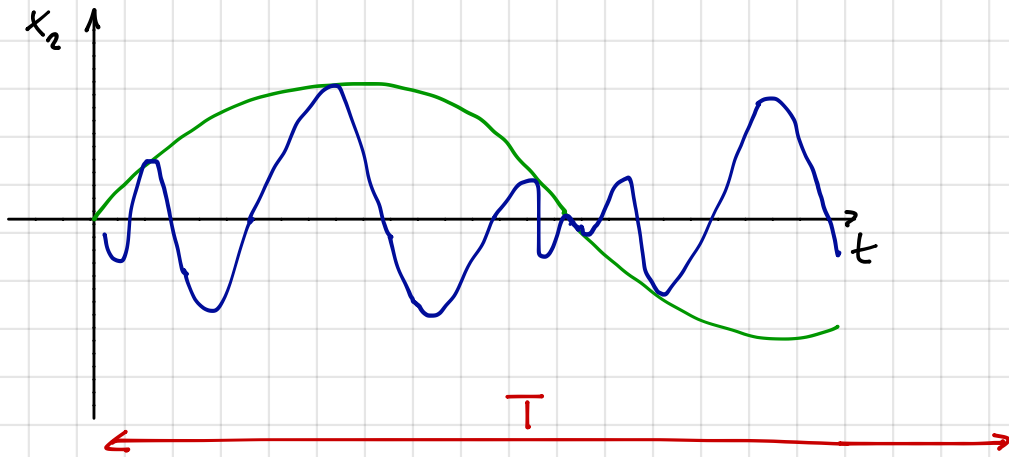
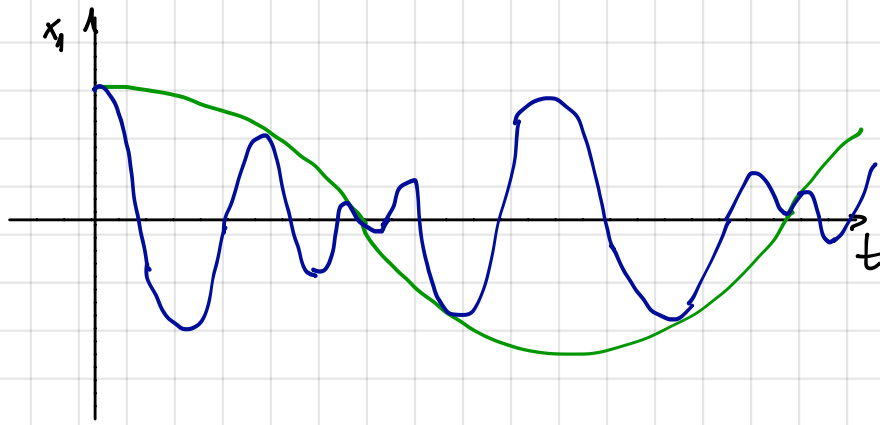
$$A_1 = A_2 = A/2$$

$$= \frac{A}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos \omega_2 t]$$

$$= A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

$$x_2(t) = x_n(t) - x_D(t)$$

$$= -A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$



Periodisches Übertragen der Schwingungsenergie von einem Federpendel auf das andere  $\Rightarrow$  Schwebung

Für  $\omega_1 \approx \omega_2$ :  $\omega_2 - \omega_1$  klein  $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$  groß

Additionstheorem:

$$\underbrace{\cos \alpha + \cos \beta}_{\text{Superposition}} = 2 \cdot \underbrace{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}_{\text{Schwebung}}$$

$\Rightarrow$  Versuch Doppelpendel

$\Rightarrow$  Versuch Feder + Torsion



## 6.1.4. Lissajous-Figuren

Überlagerung von zwei unabhängiger Schwingungen in 2 Dimensionen:

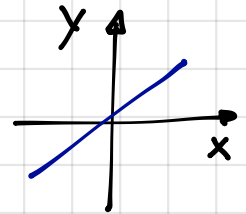
$$x(t) = a \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y(t) = b \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

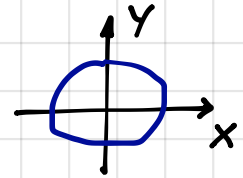
### Bahncurven

- Für  $\omega_1 = \omega_2$ ;  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$

$$y = \frac{b}{a} \cdot x$$



- Für  $\omega_1 = \omega_2$ ;  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$   $a = b \Rightarrow$  Kreis



- Allgemein: Bahnkurve geschlossen, wenn  $\omega_1/\omega_2$  rationale Zahl

$\Rightarrow$  Versuch 2 Generatoren

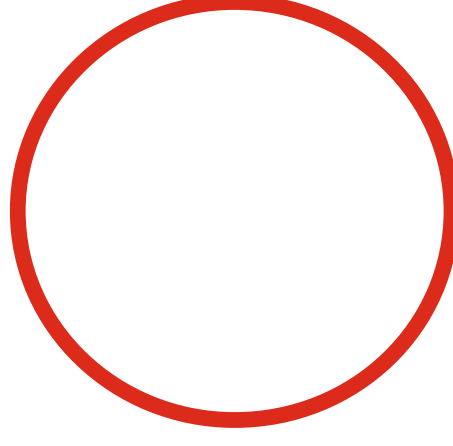
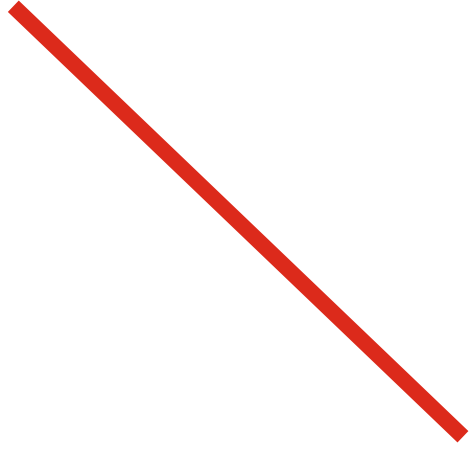
$\Rightarrow$  Simulation



# Lissajous-Figuren

$$\omega_1/\omega_2$$

1



$\Delta\varphi$

0°

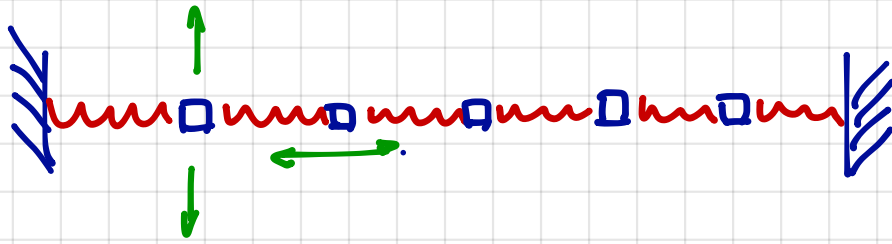
45°

90°

Siehe auch: <http://gerdbreitenbach.de/lissajous/lissajous.html>

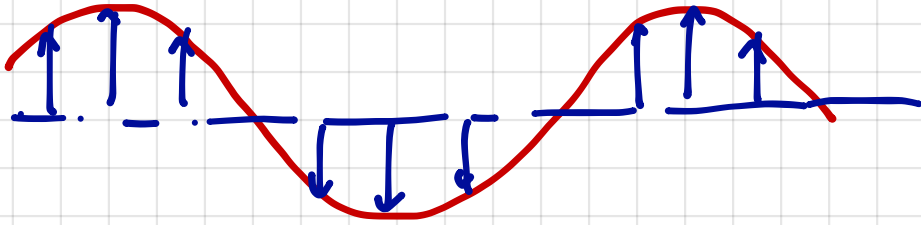
## 6.2. Wellen

Gekoppelte oszillierende Systeme von Massenpunkten



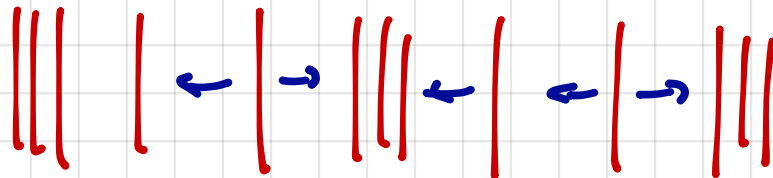
Transport von Schwingungsenergie  $\rightarrow$  Welle

### • Transversale Wellen



$\rightarrow$  Versuch: Bewegung im Senkrechten

### • Longitudinale Wellen



Beispiel: Druckwellen

$\Rightarrow$  Versuch: Feder

- Laufende Wellen



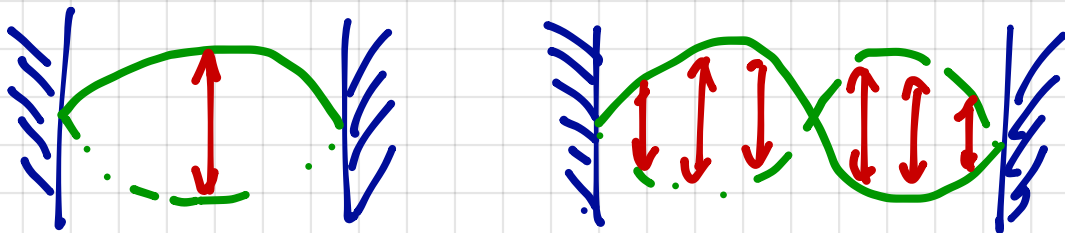
$$v = \lambda \cdot \nu$$

$\lambda$ : Wellenlänge

$\nu$ : Frequenz

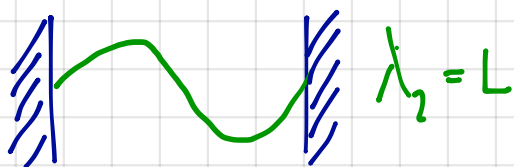
$v$ : Geschwindigkeit

- Stehende Wellen (durch Reflexion am Ende)

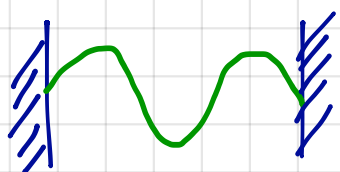


Schwingungsmoden:

⇒ Versuch Gummiband



$$\lambda_1 = L$$

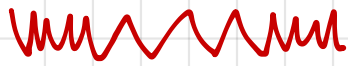


$$\lambda_3 = \frac{2}{3} L$$

Allgemein:

$$\lambda_n = \frac{2}{n} \cdot L$$

• 1d Wellen

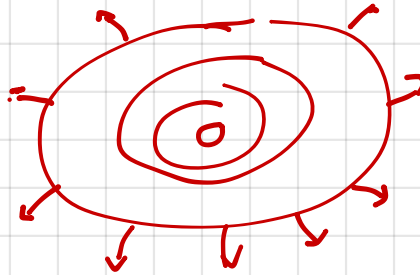


Feder

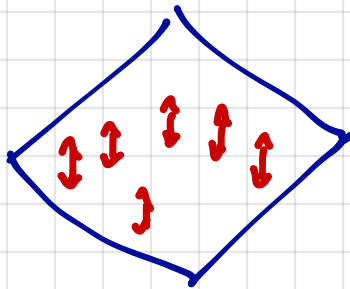


Saite

• 2d-Wellen



z.B. Wasser



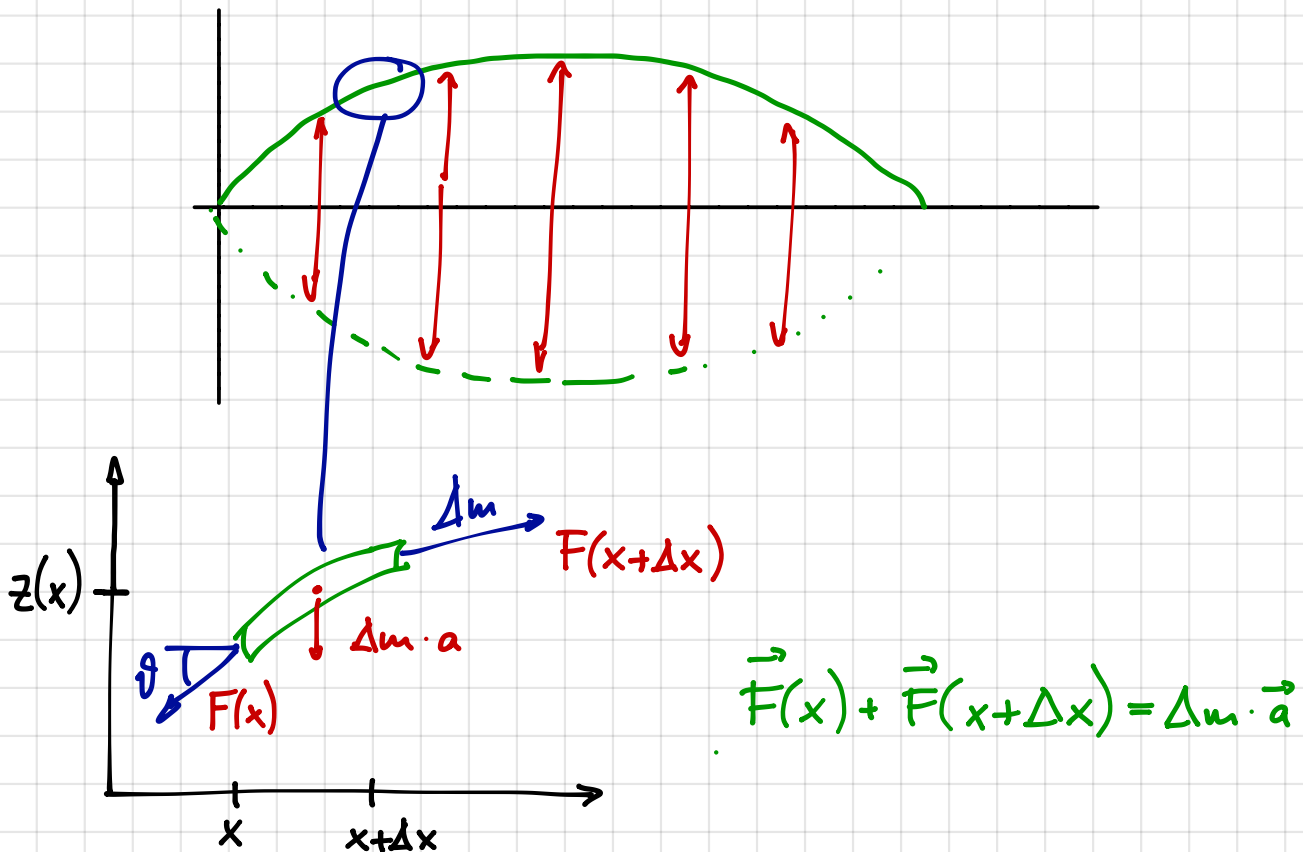
Vibration einer  
Platte

• 3d-Wellen

z.B. Schallwellen

Lichtwellen (allgemein: E-H Wellen)

## 6.2.1. Die Wellengleichung



Horizontale Komponenten von  $\vec{F}$  heben sich auf.

$$(1) \quad F_z(x) = F \cdot \sin \vartheta \approx F \cdot \tan \vartheta = F \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$(2) \quad F_z(x+\Delta x) = F \cdot \sin(\vartheta + \Delta \vartheta) \approx F \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \Delta \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$(2) - (1): \quad F \cdot \Delta \frac{\partial z}{\partial x} = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Änderung von  $\frac{\partial z}{\partial x}$   
über Intervall  $\Delta x$

Limes:  $\Delta x, \Delta m \rightarrow 0$

$$F \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d m}{d x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$\mu$ : Lineare Massendichte  $\text{kg/m}$

$$F \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Wellengleichung für Seitenschwingung

Lösung: Ansatz:  $z(x,t) = z_0 \cdot \sin(kx + \delta) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

$$k: \text{ "Wellenzahl" } = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega: \text{ Kreisfrequenz } = \frac{2\pi}{T}$$

Einsehen: siehe nächste Vorlesung

$$\Rightarrow \omega = k \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

- Je größer Spannungskraft, desto höher die Frequenz
- Je massiver die Saite, desto geringer die Frequenz