Experimentelle Physik I
WS 16/17

Veranstaltung 4010011
https://campus.studium.kit.edu/event/H7Ke2neVDU6OCIWVcuIqYw

PD Dr. Andreas B. Meyer (KIT und DESY)

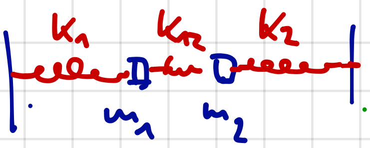
27. Vorlesung:
6.2 Schwingungen und Wellen (4): Wellen-Gleichung, Intensität, Schallwellen

Karlsruher Institut für Technologie

2. Februar 2017

Zusammenfassung

6.1.3. Gekoppelte Schwingungen



Bew.-glg:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_{12}(x_2 - x_1)$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_{12}(x_2 - x_1)$$

Spezialfall: $m_1 = m_2 = m$; $k_1 = k_2 = k$

Ansatz

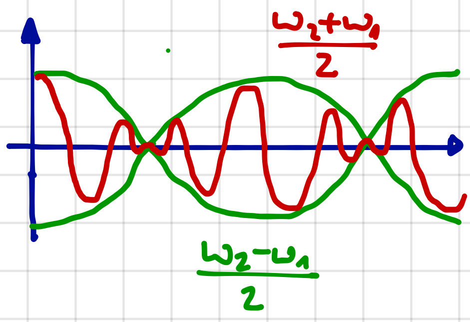
$$x_\Pi := \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = A_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_D := \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = A_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

3 Anfangsbedingungen:

1) Schwingung in Phase
2) Schwingung in Gegenphase
3) Superposition von Schwingungen ähnlicher Freq. $\Rightarrow$ Schwebung

$$x_1(t) = \frac{A}{2}\Big[\underbrace{\cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_1 t)}_{\text{Superposition}}\Big]$$

$$= A \cdot \overbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)}^{\text{Schwebung}}$$



$\rightarrow$ gekoppelte Pendel

$\rightarrow$ Federdehnung und Torsion

$\rightarrow$ Frequenzgeneratoren

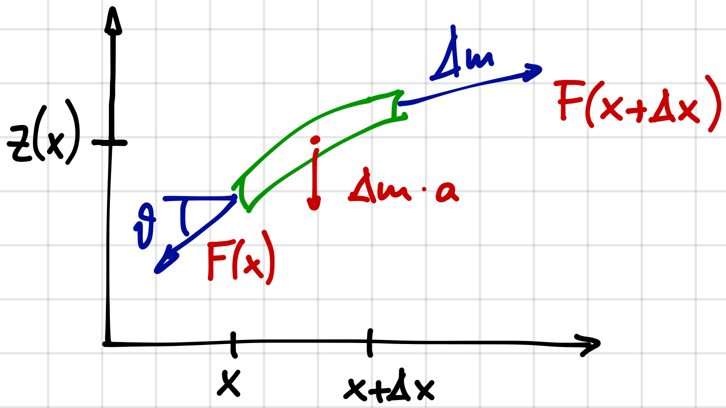
6.1.4 Lissajous-Figuren

Trajektorien unabhängiger Schwingungen in zwei Dimensionen (x,y)

6.2. Wellen

transversal	1D, 2D, 3D ...	laufend
longitudinal		stehend

Wellengleichung für Saitenschwingung (1D, transversal)



$$\vec{F}(x) + \vec{F}(x+\Delta x) = \Delta m \cdot \vec{a}$$

nur senkrechte Bewegung

$$F_z(x) = F\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$F_z(x+\Delta x) \approx F\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \Delta\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Änderung von $\frac{\partial z}{\partial x}$ in Δx

$$\boxed{F \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}}$$

Lösung: Ansatz: $z(x,t) = z_0 \cdot \sin(kx+\delta) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

k: „Wellenzahl" $= \frac{2\pi}{\lambda}$

ω: Kreisfrequenz $= \frac{2\pi}{T}$

Einsetzen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_0 \cdot k \cdot \cos(kx+\delta) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -z_0 k^2 \sin(\quad) \cdot \cos(\quad)$$

$$= -k^2 z(x,t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -z_0 \cdot \omega \sin(\quad) \sin(\quad)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -z_0 \omega^2 \sin(\quad) \cos(\quad)$$

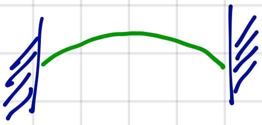
$$= -\omega^2 z(x,t)$$

$$-F k^2 z(x,t) = -\mu \omega^2 \cdot z(x,t)$$

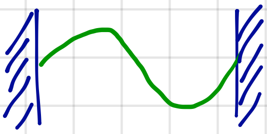
$$\Rightarrow \boxed{\omega = k \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Stehende Welle auf Saite:

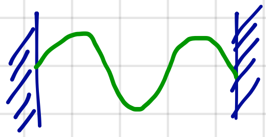
$$z(x,t) = \underbrace{f(x)}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{g(t)}_{\text{Zeitabhängigkeit}}$$



$\lambda = 2L$



$\lambda_2 = L$

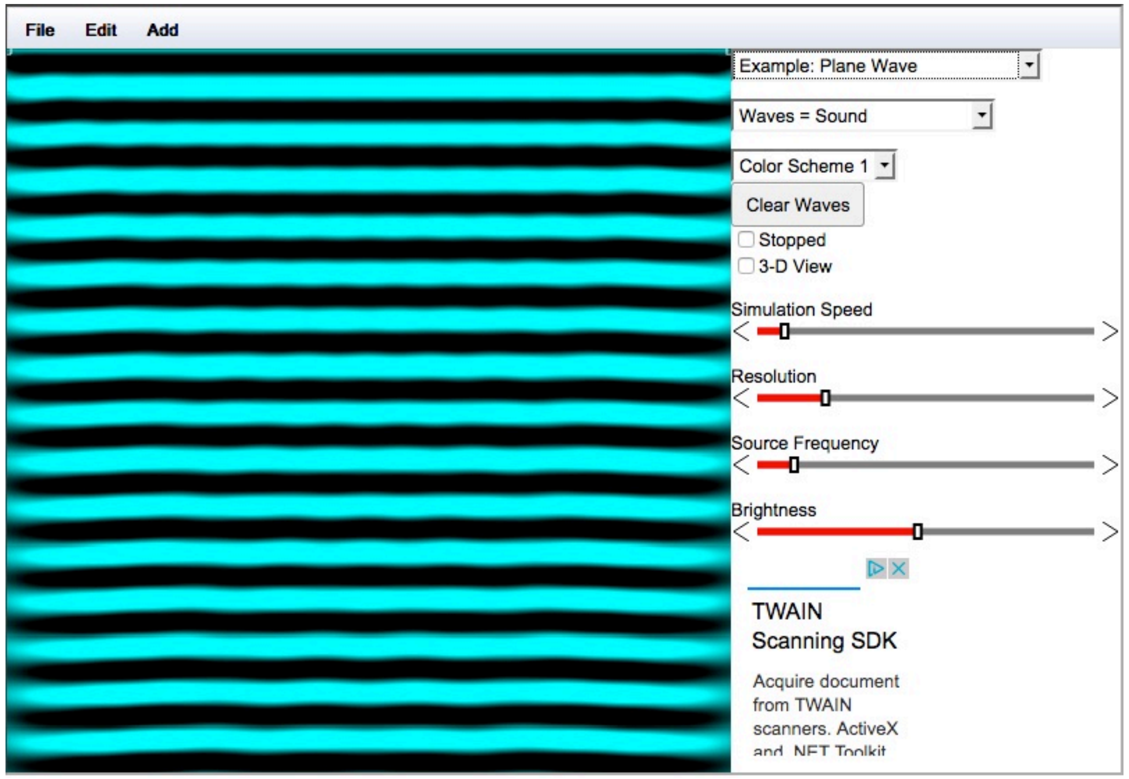


$\lambda_3 = \frac{2}{3} L$

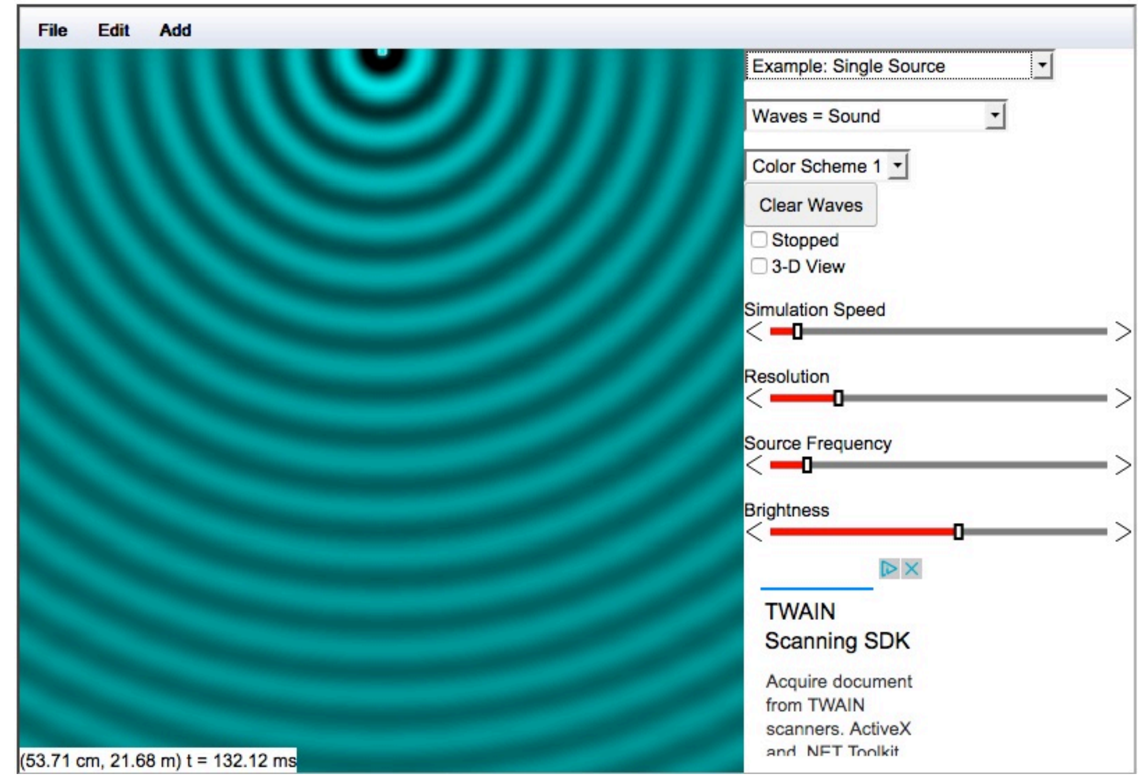
$$\boxed{\omega_n = \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Allgemein: $\boxed{\lambda_n = \frac{2}{n} \cdot L}$

$\rightarrow$ Versuch: Wasserwellen.

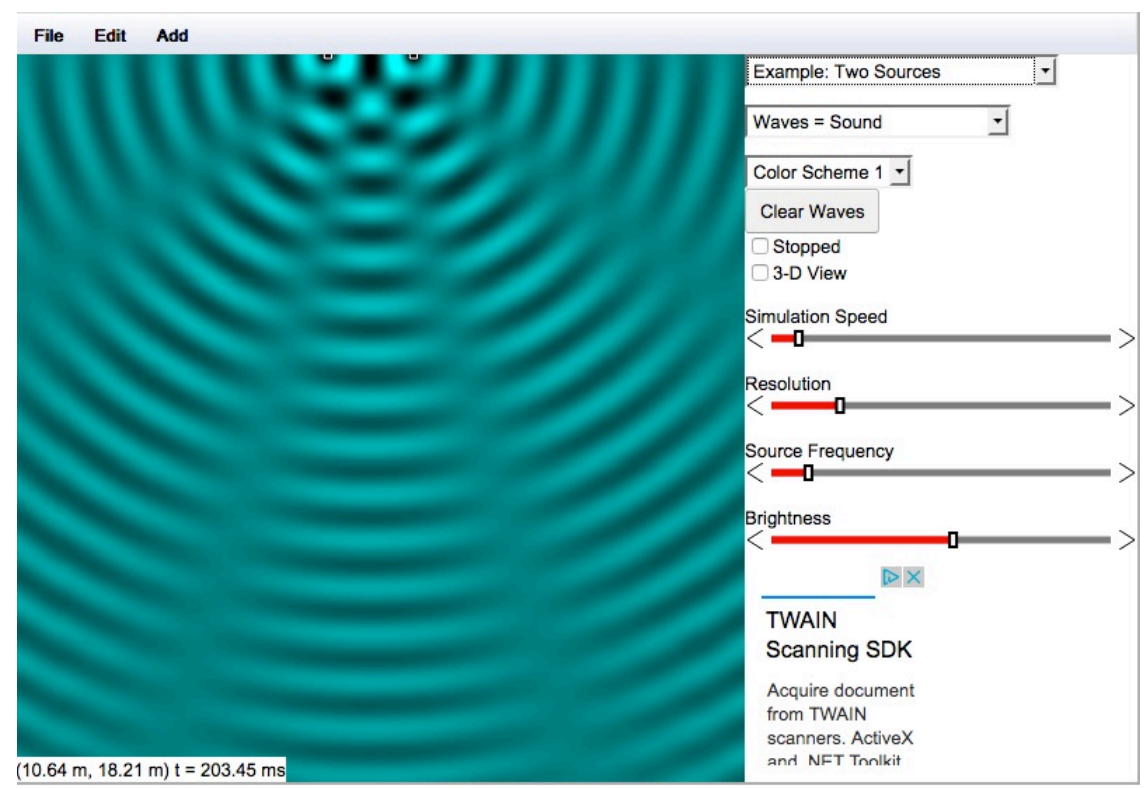


Ebene Wellen



Kreiswellen (Punktquelle)

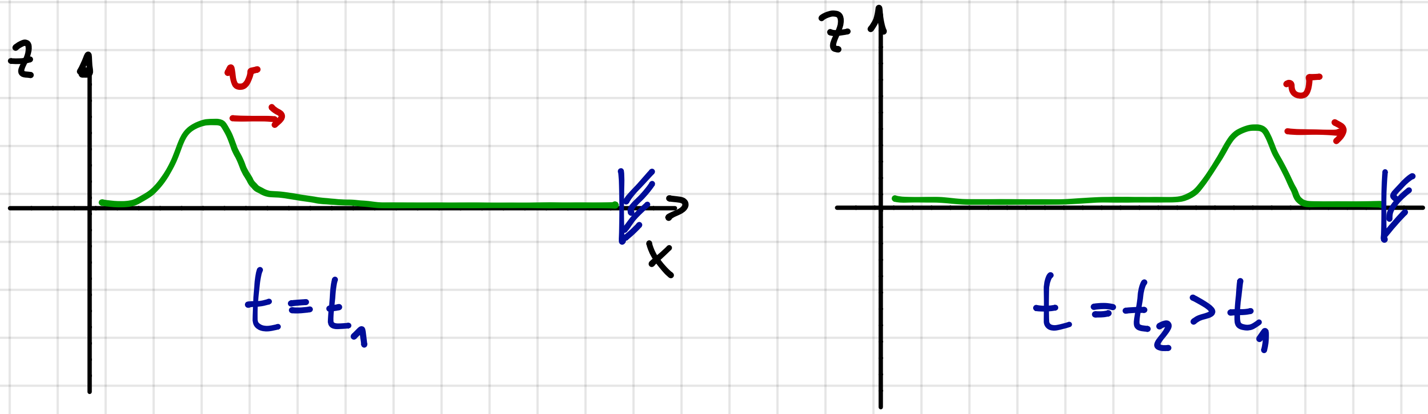
http://falstad.com/ripple/



Überlagerung von Kreiswellen (2 Punktquellen)

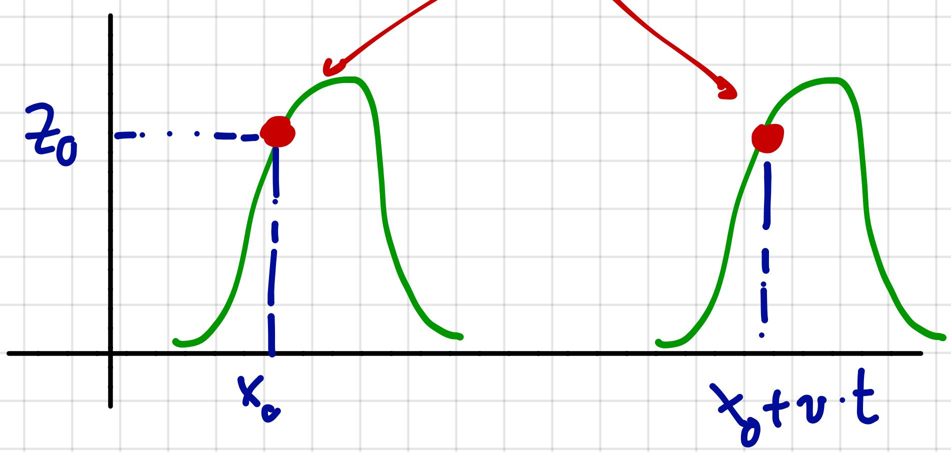
6.2.2 Phasengeschwindigkeit

Laufende Welle auf Saite:



Beschreibung durch: $z(x,t) = f(x - v \cdot t)$

fester Punkt auf Welle: feste Phase



$t = 0 \quad z_0 = f(x_0)$ $\qquad$ $t = t \quad z_0 = f(x - v \cdot t)$

Wellengleichung

$$F \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Ansatz: $z(x,t) = z_0 \cdot \sin k(x - vt)$

Einsetzen: $-k^2 F \cdot z_0 \cdot \sin k(x-vt) = -k^2 v^2 \mu\, z_0 \sin k(x-vt)$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{\omega}{k}}$$ Phasengeschwindigkeit

Betrachte: $z(x,t) = z_0 \sin \big(\overbrace{kx - \omega t}^{\text{Phase}}\big)$

oder $z(x,t) = Z \cdot e^{i(kx-\omega t)}$ $\quad Z \in \mathbb{C}$

- v_{Ph} = Geschw der Punkte konstanter Phase: $kx - \omega t = \text{const}$

  denn: $\frac{d}{dt}(kx - \omega t) = 0 \Rightarrow k \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_{Ph}} - \omega = 0$

- Punkte gleicher Phase: $k \underbrace{\lambda}_{\text{Wellenlänge}} = \omega \cdot \underbrace{T}_{\text{Periode}}$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \boxed{v_{Ph} = \lambda \cdot \nu}$$

Allgemeine Wellengleichung in 3D

$$\boxed{\Delta \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2}}$$

Laplace-Operator: $\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$

Bisher: Ebene Wellen $z(x,t) = z_0 \cdot \underbrace{\sin(kx - \omega t)}_{\text{harmonische laufende Welle}}$

Andere Lösung:

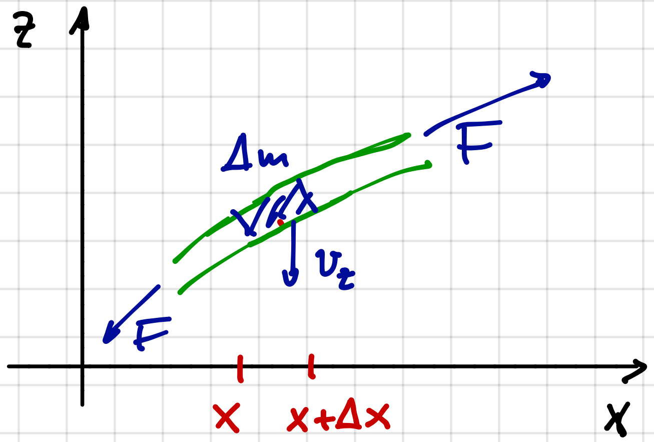
Kugelwellen (3D): $z(\vec{r},t) = f(r) \cdot \overbrace{\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

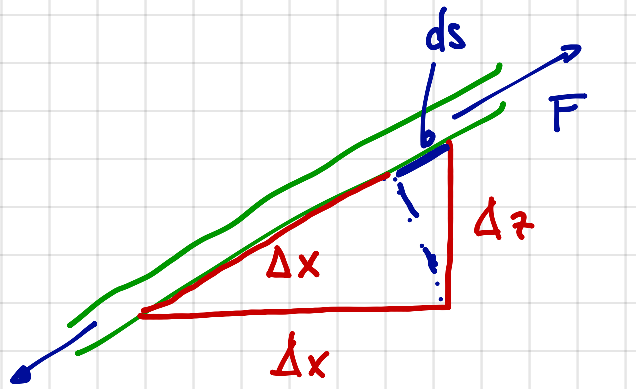
$f(r) = \frac{z_0}{r}$

6.2.3 Energie und Intensität von Wellen

In mechanischen Systemen: Massepunkte übertragen Energie auf benachbarte Massen.

Beispiel: Saite





a) Kinetische Energie

$$dE_K = \frac{1}{2}\, dm \cdot v_z^2 = \frac{1}{2}\, \mu\, dx \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

Lineare Massendichte

b) Potentielle Energie (in elastischer Dehnung)

$$dE_p = \vec{F} \cdot d\vec{s} \approx F\left(\sqrt{dx^2 + dz^2} - dx\right)$$

$$= F\, dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} - 1\right)$$

$$\approx F\, dx \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

mit $(1+\varepsilon)^n = 1 + n \cdot \varepsilon$

Binomische Reihe für $n = \frac{1}{2}$

c) Energie eines Massenelementes

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE_k}{dx} + \frac{dE_p}{dx}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mu\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + F\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)$$

Energiedichte: $\frac{dE}{dx}$
da kontinuierliche Massenverteilung

Beispiel Ebene Welle

$$z(x,t) = z_0 \cdot \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 z_0^2 \cos^2(kx-\omega t) + \frac{1}{2}F\cdot k^2 \cdot z_0^2 \cdot \cos^2(kx-\omega t)$$

Mit $\mu\omega^2 = Fk^2 \Rightarrow$ $$\frac{dE}{dx} = \mu\,\omega^2 z_0^2 \cos^2(kx-\omega t)$$

μ: Massendichte $\frac{dm}{dx}$

$\frac{dE}{dx}$: Energiedichte $\frac{dE}{dx}$

$\propto (\text{Amplitude})^2$

$\propto \omega^2$

d) Leistung und Intensität

Leistung: $\langle p \rangle = \dfrac{\text{mittlere Energiedichte} * \text{Länge}}{\text{Zeitintervall}}$

$$= \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \cdot \frac{dx}{dt}$$ – Gesamtenergie d.h. $E_{KIN,MAX}$

$$= \frac{1}{2} \mu \omega^2 z_0^2 \cdot v$$

Für 3D-Wellen: $\mu \to \rho$

Intensität (Energieflußdichte) $I \equiv \dfrac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} = \dfrac{\text{Energiedichte} \cdot \Delta V}{A \cdot \Delta t}$

$$\Delta V = A \cdot \Delta x = A \cdot v \cdot \Delta t \qquad dm = \rho \cdot dV$$

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 z_0^2 \cdot v$$

$$I \propto z_0^2, \omega^2$$

Beispiel: Kugelwelle 3-D Kugeloberfläche: $4\pi r^2$

Intensität $\propto \dfrac{1}{\text{Fläche}} \propto (\text{Amplitude})^2 \Rightarrow$ Amplitude $\propto \dfrac{1}{r}$

$4\pi r^2$

Abgestrahlte Leistung integriert über Kugeloberfläche muß konstant sein.

6.2.4 Schallwellen

Schallwelle ist longitudinale Druckwelle in einem Medium (Gas, Fl.k., Festkörper)

Verdichtung / Verdünnung

Generell: $v = \sqrt{\frac{\text{Rückstellkraftfaktor}}{\text{Massenfaktor}}}$

Speziell: Saite $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

Schall: $v = \sqrt{\varkappa \cdot \frac{p_0}{\rho_0}}$

$\varkappa$: 1,4 für nichtideales Gas

Beispiel: Luft $p_0 = 10^5 \frac{N}{m^2}$, $\rho_0 = 1{,}3 \frac{kg}{m^3}$ $\Big\}$ $v = 330 \frac{m}{s}$ (0°C)

→ Versuche zur Schallgeschwindigkeit

⇒ Rubensches Flammenrohr
⇒ Stehende Schallwellen $\Big\}$ Weihnachtsvorlesung
⇒ Laufzeitmessung

Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Medien

Ideales Gas: $c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho}}$

Reelles Gas: $c = \sqrt{\varkappa \frac{p_0}{\rho}}$

Flüssigkeit: $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ $\quad K$: Kompressionsmodul

Festkörper: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $\quad E$ = Elastizitätsmodul

Beispiel: $c_{Fe} = 6 \, \frac{km}{s}$

$c_{H_2O} = 1{,}5 \, \frac{km}{s}$

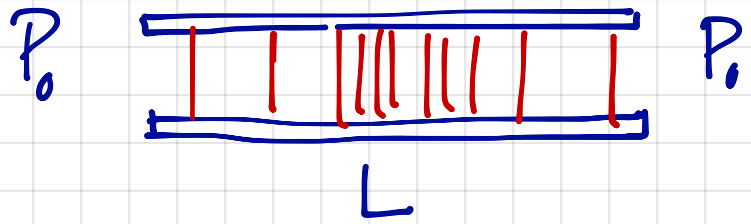
$c_{Luft} = 0{,}33 \, \frac{km}{s}$

$c_{He} = 1{,}3 \, \frac{km}{s}$

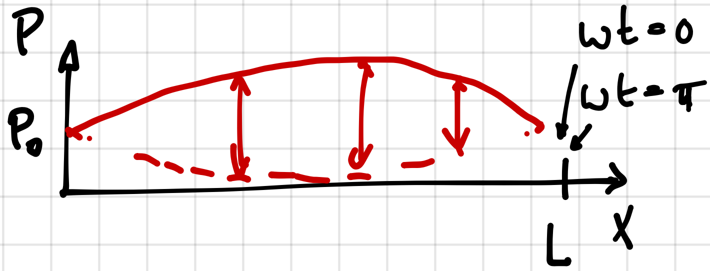
Stehende Schallwellen

a) Pfeife, an beiden Enden offen

$$\boxed{\nu_n = \frac{v}{\lambda_n}}$$



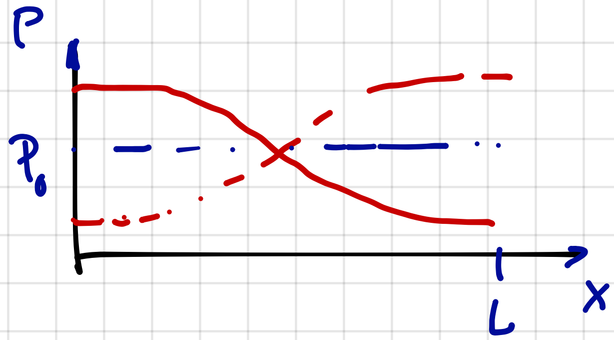
d.h. Druck an den Enden = Außendruck
→ Knoten



$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

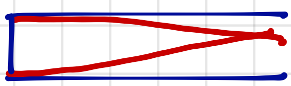
b) Pfeife an beiden Enden geschlossen

Druck an den Enden ⇒ Bauch

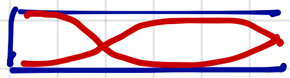


$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

c) An einem Ende offen



$\lambda_1 = 4L$



$\lambda_2 = \frac{4}{3}L$

$$\lambda_n = \frac{4}{2n-1}L$$

⇒ Versuch: Orgelpfeife offen/zu

Zuhalten der Pfeife: Erniedrigung der Frequenz →
→ Erhöhung der Wellenlänge → Fall c)

⇒ Reale Orgelpfeife ist an beiden Enden <u>offen</u>.