Experimentelle Physik I
WS 16/17

Veranstaltung 4010011
https://campus.studium.kit.edu/event/H7Ke2neVDU6OCIWVculqYw

PD Dr. Andreas B. Meyer (KIT und DESY)

28. Vorlesung:
6.2 Schwingungen und Wellen (5): Doppler-Effekt, Überlagerung von Wellen

Karlsruher Institut für Technologie

7. Februar 2017

Zusammenfassung

6.2.1. Die Wellengleichung

Saitenschwingung (1D):

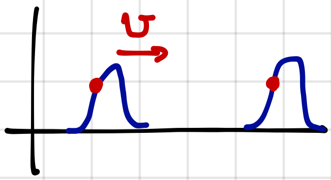
$$\boxed{F\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\omega = k \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Wasserwellen (Versuch und Simulation)

Ebene Wellen, Kreiswellen, Interferenz

6.2.2. Phasengeschwindigkeit



$$z(x,t) = z_0 \cdot \sin(\underbrace{kx - \omega t})$$

fester Punkt auf Welle $\hat{=}$ Phase

- $kx - \omega t = \text{const} \Rightarrow \boxed{v_{ph} = \frac{\omega}{k}}$
- Mit $k\lambda = \omega T \Rightarrow \boxed{v_{ph} = \lambda \cdot \nu} \Rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

Wellenzahl

6.2.3 Energie und Intensität von Wellen

Energiedichte: $\frac{dE}{dx} = \frac{dE_k}{dx} + \frac{dE_p}{dx}$

Intensität: $I = \frac{\text{Energie}}{\text{Oberfläche} \cdot \text{Zeit}}$

(Energieflußdichte)

$\propto (\text{Amplitude})^2$ und ω^2

Beispiel: Kugelwelle (3D): Amplitude $\propto \frac{1}{r}$, da Fläche $\propto r^2$

6.2.4. Schallwellen

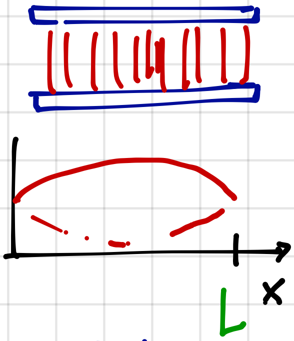
nicht ideales Gas: 1,4

Allgemein: $v = \sqrt{\varkappa \cdot \frac{p_0}{\rho}}$

Versuch: Messung der Schallgeschwindigkeit.

Stehende Wellen (Beispiel Pfeife)

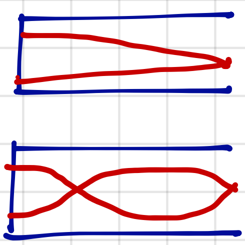
1.) beide Seiten offen: Enden auf Außendruck



niedrigste Mode λ_1

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

3) Eine Seite geschlossen



$\lambda_1 = 4L$

$\lambda_2 = \frac{4}{3}L$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{4}{2n-1} L}$$

Versuch: Tonfrequenz erniedrigt

6.2.5. Doppler-Effekt

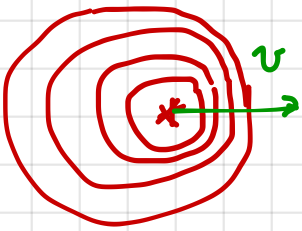
C. Doppler
1803–1853

Wellen mit (rel. zum Medium) bewegten Quellen oder Beobachtern

→ Vier prinzipiell unterscheidbare Fälle

a) Quelle bewegt sich, Empfänger ruht

1.) (Q→) E



$\Delta x = T \cdot v$

$$\lambda' = \lambda - \Delta x = \lambda - v \cdot T = \frac{c - v}{\nu}$$

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c-v} \cdot \nu = \frac{1}{1-\frac{v}{c}} \cdot \nu \qquad \nu' > \nu$$

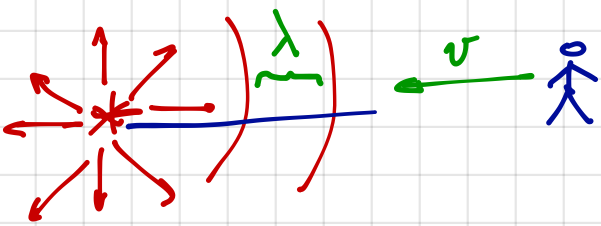
2.) (←Q) E

$$\nu' = \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \cdot \nu \qquad \nu' < \nu$$

⇒ Versuch: Bewegte Quelle

b) Quelle ruht, Empfänger bewegt sich

1.) Q (←E) ⇒ sieht mehr Wellen pro Zeit



$$c' = c + v \qquad \nu' > \nu$$

$$\nu' = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c+v}{\lambda} = \nu\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

2.) Q (E→)

$$\nu' = \nu \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) \qquad \nu' < \nu$$

Vergleich:

a) $Q\ (\leftarrow E)$: $\nu' = \nu \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)$

b) $(Q \rightarrow)\ E)$: $\nu' = \frac{\nu}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$

Entwicklung:

$v/c = x$

a) $(1+x)$

b) $$\underbrace{\frac{1}{(1-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k}_{\text{Geometrische Reihe}} = x^0 + x + x^2 + \dots$$

$$\approx 1 + x$$

unterscheidbar um $\left(v/c\right)^2$

c) Q und E bewegen sich im ruhenden Medium aufeinander zu

$(Q\rightarrow)(\leftarrow E)$

$$\nu' = \nu \cdot \frac{c+v_E}{c-v_Q}$$

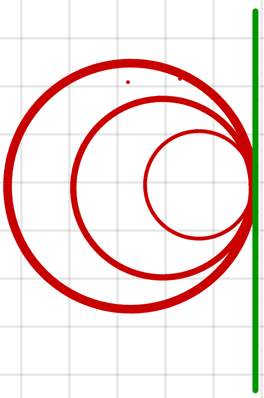
<u>Vergleich Relativitätstheorie:</u>

<u>Kein Medium („Äther" etc.)</u>

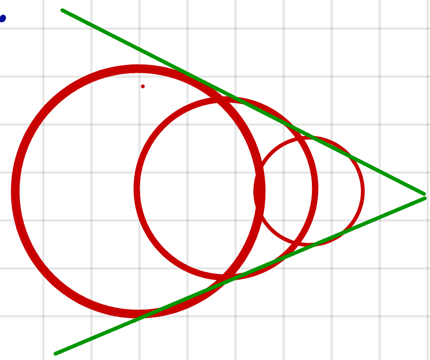
$$\nu' = \nu_Q \cdot \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}$$

d) Überschall: $(Q\rightarrow)\ E$

$v_Q = c$



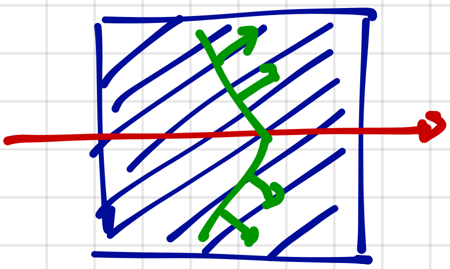
$v_Q > c$



Überschallkegel $\Rightarrow$ Knall

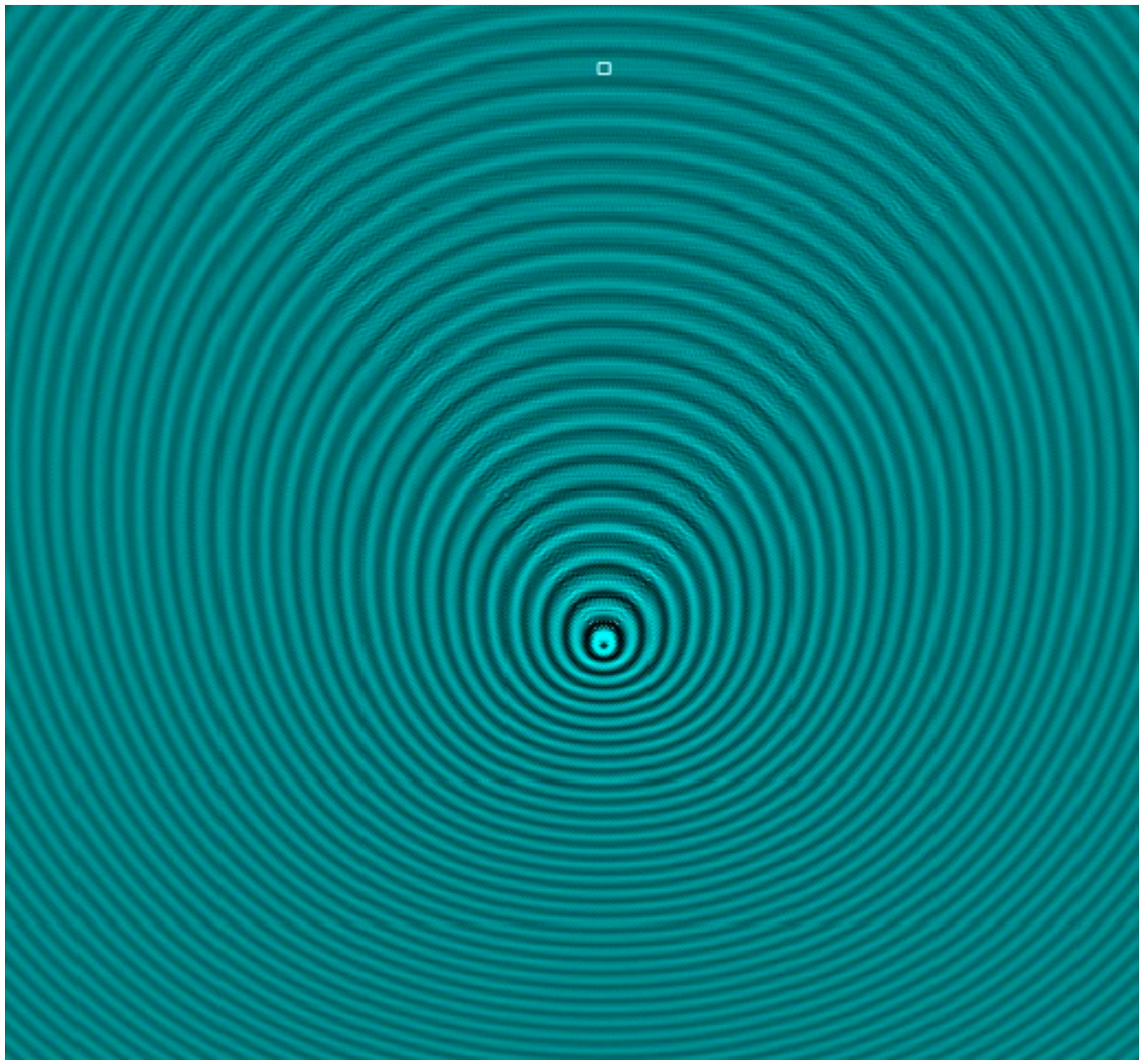
Analog: Cerenkov-Licht:

$$c_{Medium} = \frac{c_{Vakuum}}{n}$$

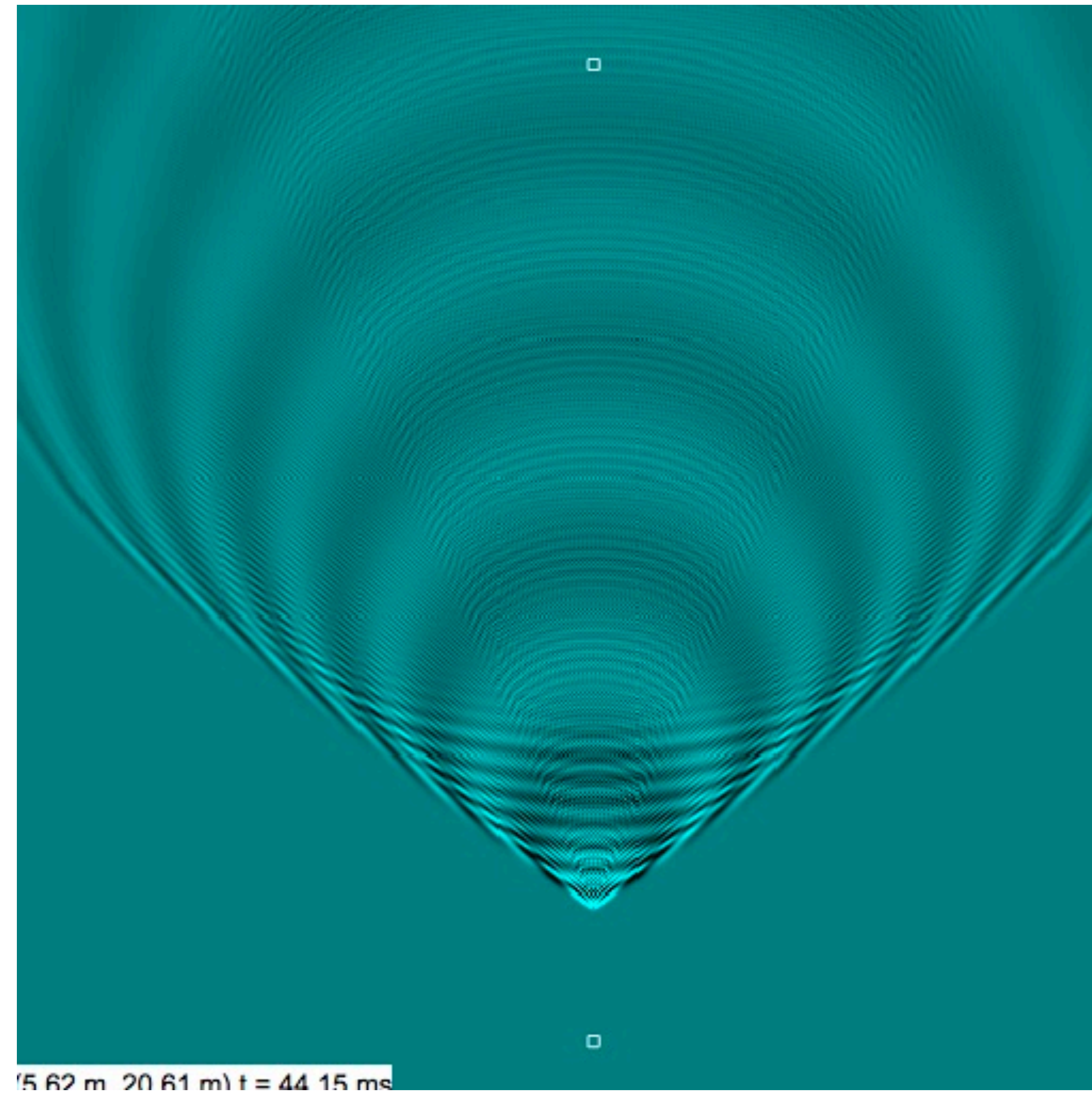


$$v > \frac{c}{n}$$

Doppler-Effekt



Überschallknall



http://falstad.com/ripple/

6.2.6 Überlagerung von Wellen

1) Allgemeines Superpositionsprinzip für Lösungen homogener linearer DGL

Wenn $z_1(x,t)$ und $z_2(x,t)$ Wellenfunktionen sind, dann auch $a \cdot z_1(x,t) \pm b z_2(x,t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

Beispiel: Zwei laufende Wellen

$$z_1(x,t) = z_0 \cdot \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$z_2(x,t) = z_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$z(x,t) \equiv z_1 + z_2$$

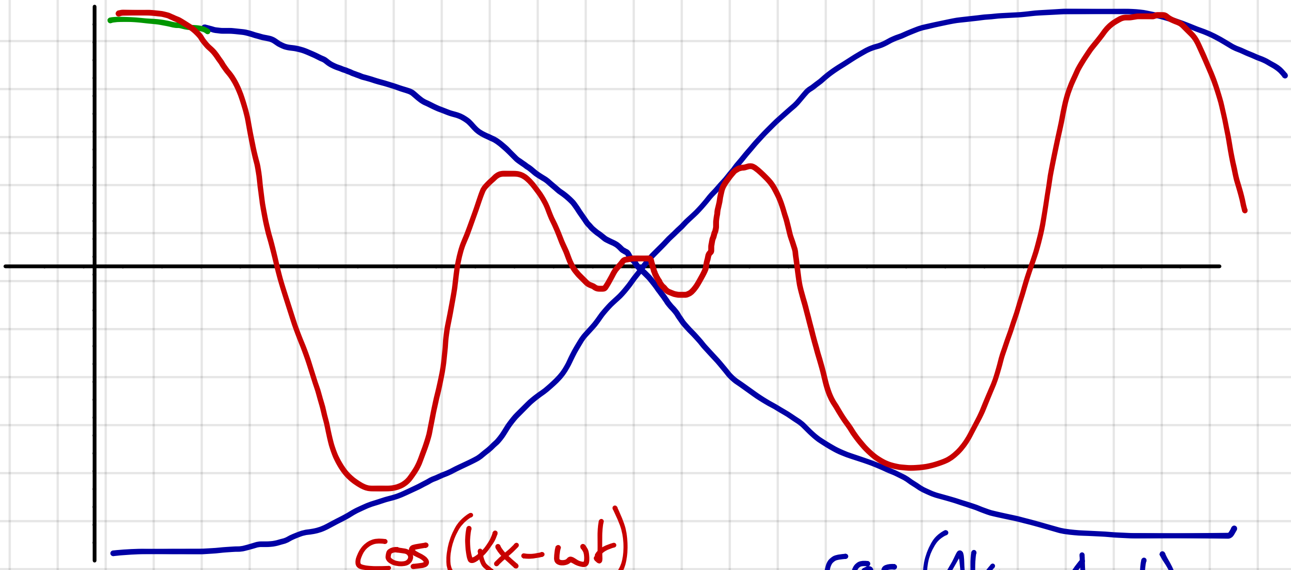
Additionstheorem:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= 2 z_0 \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \cos(\Delta k x - \Delta\omega t)$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} \qquad \underbrace{\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}}_{\text{Modulation der Amplitude}}$$



Phasengeschwindigkeit: $kx - \omega t = const$ $\quad v_{Ph} = \frac{\omega}{k}$

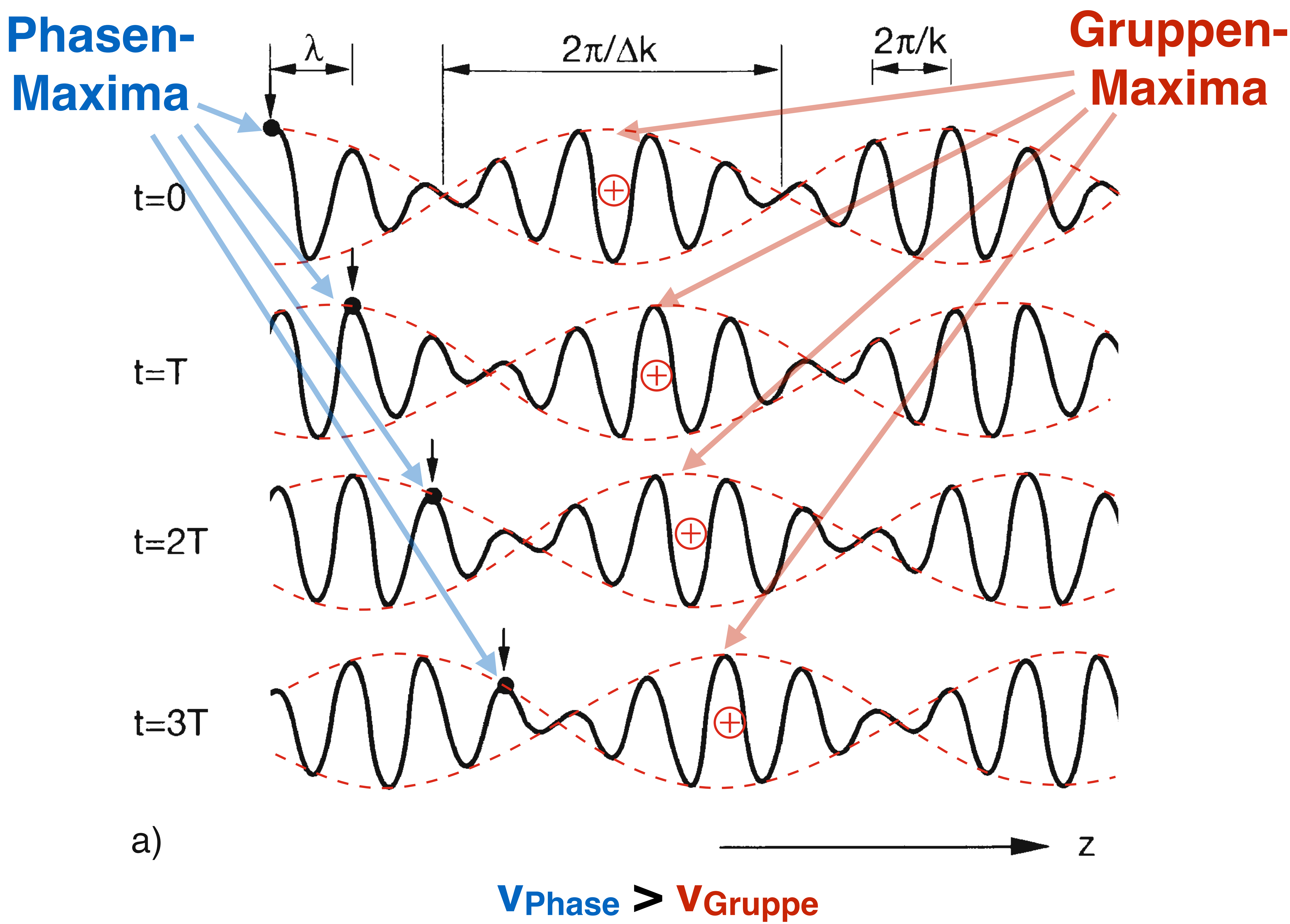
Gruppengeschwindigkeit $\Delta k x - \Delta \omega t = const.$

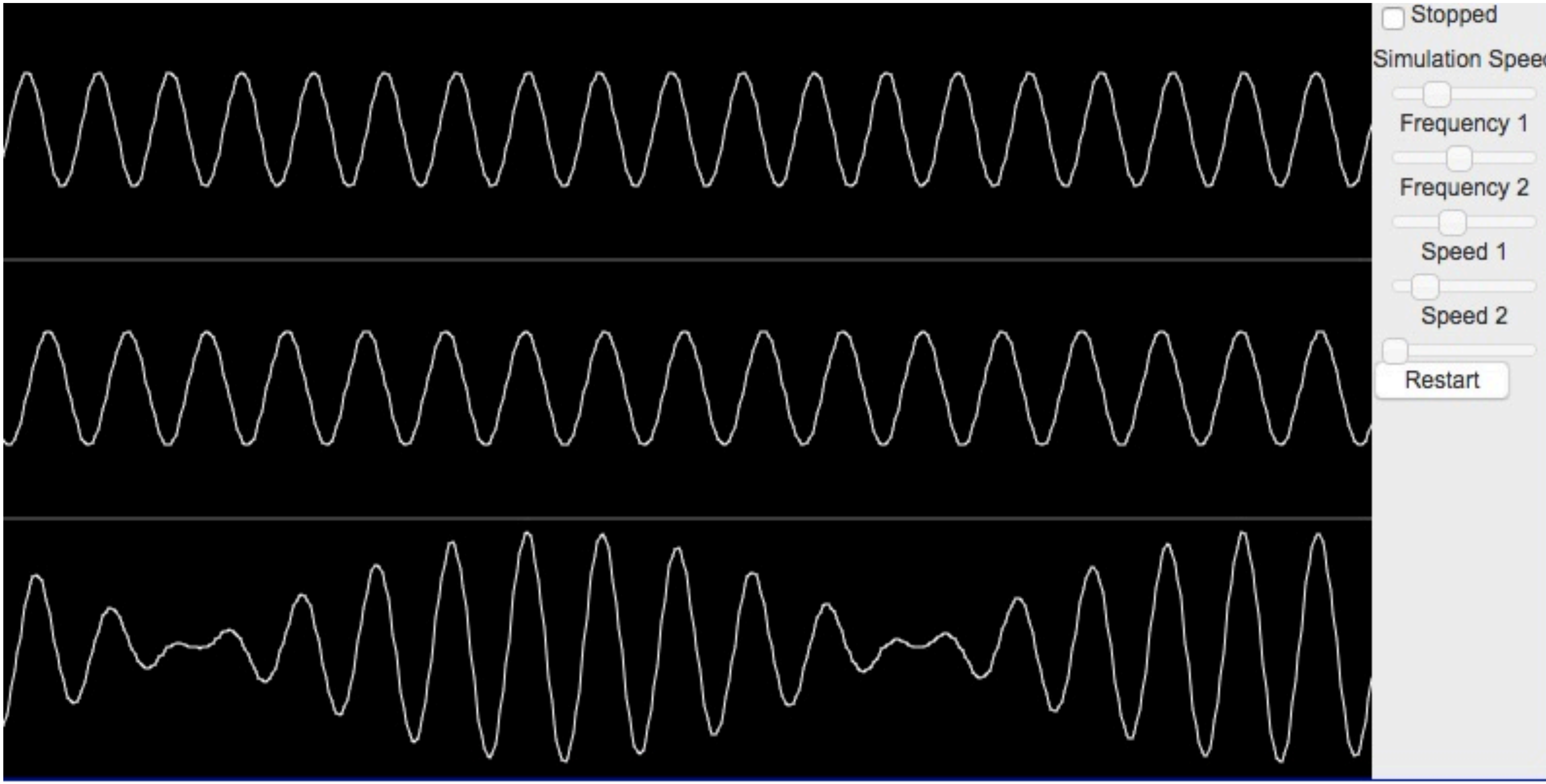
$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = v_{Gr}}$$

In Medien kann Frequenz ω von Wellenlänge k abhängen

$\omega = \omega(k)$ (Dispersionsrelation)

Dann ist $v_{Ph} \neq v_{Gr}$


Phasen-
Maxima
λ
2π/Δk
2π/k
Gruppen-
Maxima
t=0
t=T
t=2T
t=3T
a)
z
v_Phase > v_Gruppe



http://www.falstad.com/dispersion/

Bei geeigneter Überlagerung vieler Wellen:

$\Rightarrow$ einzelne Wellenpakete $\qquad \Rightarrow$ Q.M.

Bestimmung von v_{Gr}:

$$\Delta k x - \Delta \omega t = \text{const.}$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta k x - \Delta \omega t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = v_{Gr}$$

Für Wellenpaket mit vielen nah beieinander liegenden Frequenzen:

$$\boxed{v_{Gr} = \frac{d\omega}{dk}}$$

$$v_{Gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_{Ph} \cdot k) = v_{Ph} + \underbrace{k \frac{dv_p}{dk}}_{\neq 0,\ \text{falls } v_{Ph} = v_{Ph}(k)}$$

$\Rightarrow \quad v_{Gr} \neq v_{Ph}$, falls v_{Ph} abhängig von k, $v_{Ph} = v_{Ph}(k)$

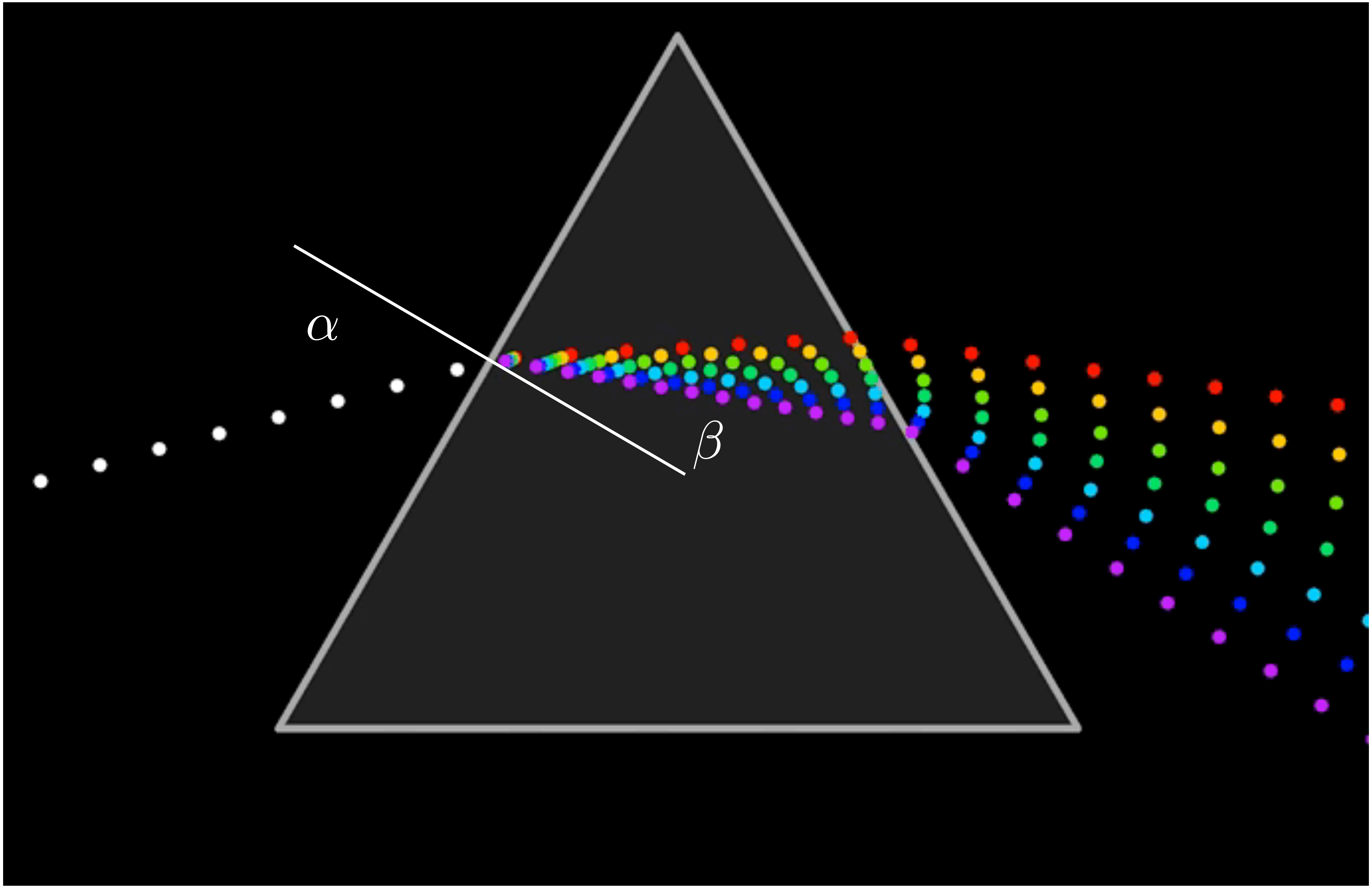
$$\Updownarrow$$

$$\omega = \omega(k)$$

Dispersion existiert in den meisten Medien

Beispiel: Licht durch Prisma

Beispiel: Frequenzabhängige Lichtgeschwindigkeit in Medien



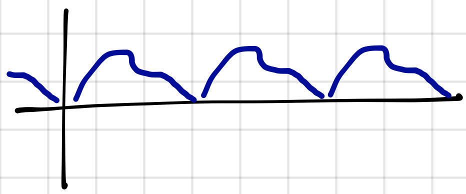
Snellius $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Dispersion_(Physik)

2) Fourier-Analyse

Jede periodische Funktion kann durch Superposition von harmonischen Wellen beschrieben werden.

$$f(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega t) + \sum_1^{\infty} b_n \sin(n \omega t)$$



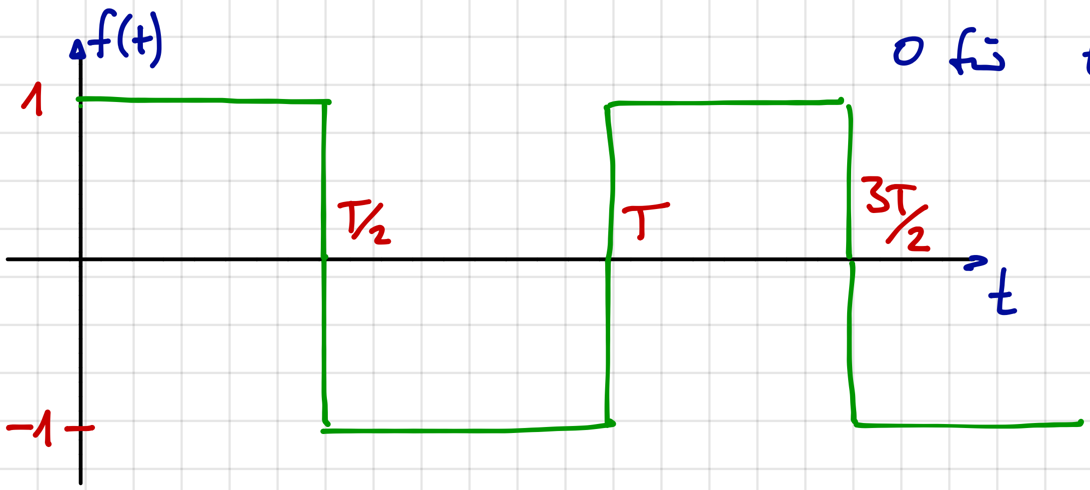
Bestimmung der Koeffizienten a_n und b_n

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n \omega t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n \omega t)\, dt$$

Beispiel: Rechteckfunktion

$f(t) = 1$ für $t = 0 \ldots T/2$
$\quad -1$ für $t = T/2 \ldots T$
$\quad 0$ für $t = T/2, T, \ldots$



Berechnung der Koeffizienten der Rechteckfunktion

$$a_n = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} \cos(n\omega t)\,dt - \int_{T/2}^{T} \cos(n\omega t)\,dt\right)$$

$$= 0 \text{ für alle } n$$

$$= \frac{2}{T}\frac{1}{n\omega}\left(\sin(n\omega t)\Big|_0^{T/2} - \sin(\quad)\Big|_{T/2}^{T}\right) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\cdot\left(\sin n\pi - \sin 0 + \sin n\,2\pi - \sin n\pi\right) = 0$$

Keine Beiträge von geraden Funktionen

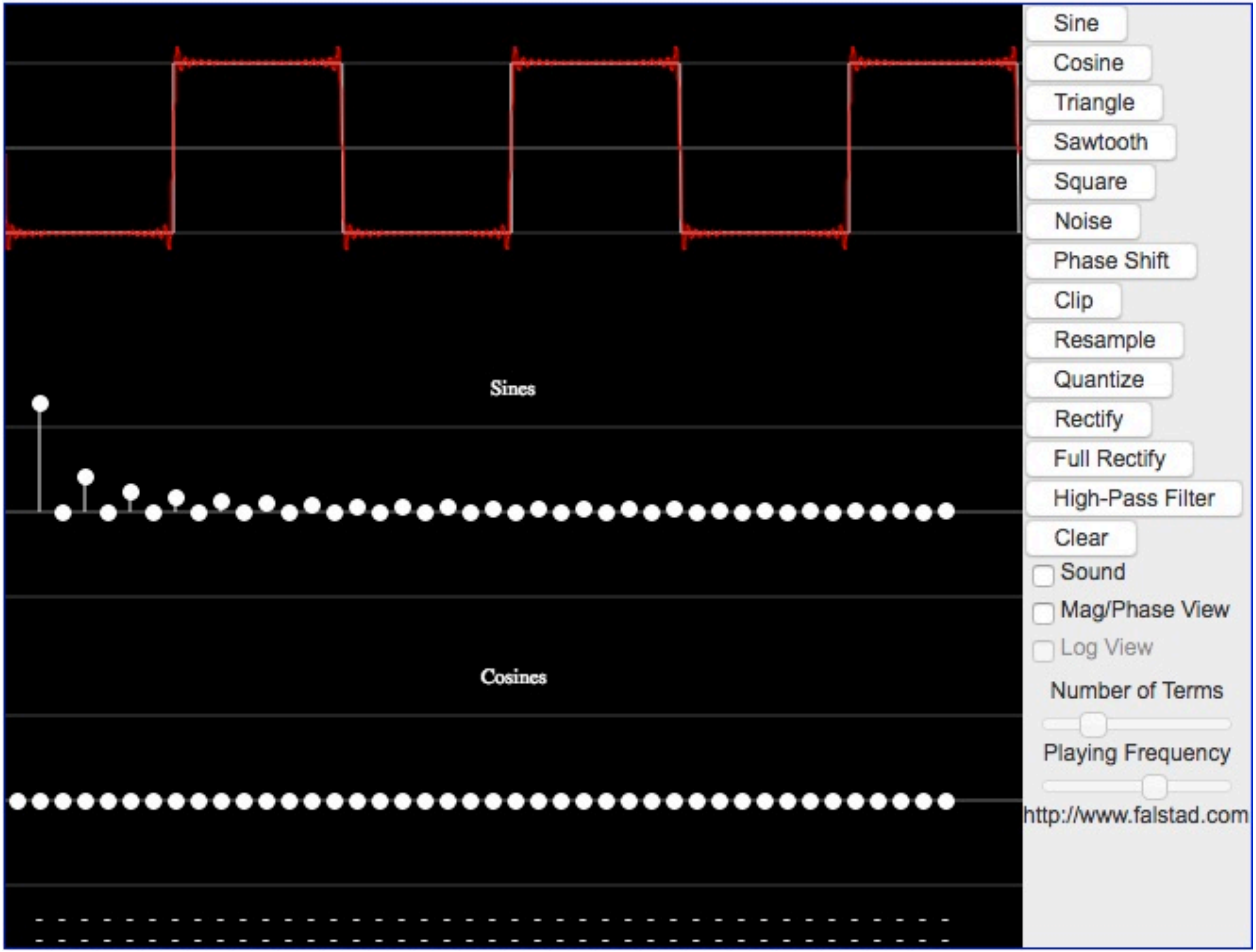
$$b) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{T/2} \sin(n\omega t)\,dt - \int_{T/2}^{T} \sin(n\omega t)\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\left(1 - \underbrace{\cos n\pi}\right)$$

$= -1$ für $n = 1, 3, \ldots$

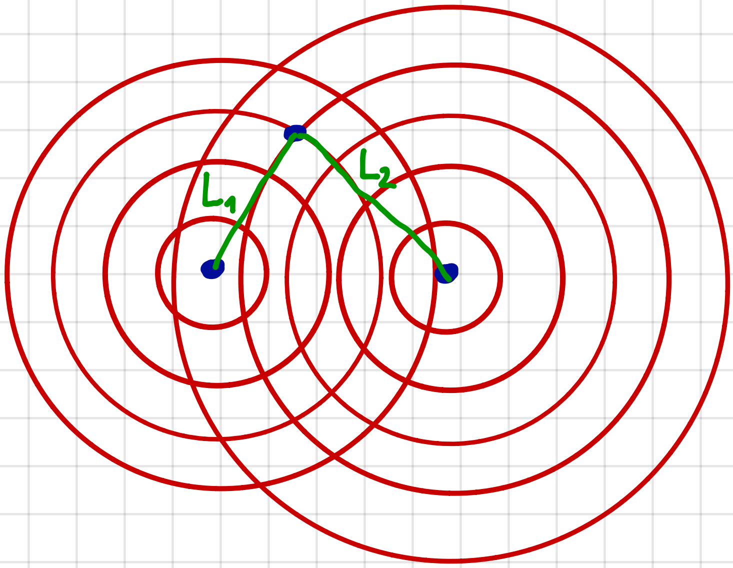
$= 1$ für $n = 2, 4, \ldots$

$$= \frac{4}{n\cdot\pi} \quad \text{für } n \text{ ungerade}$$



http://falstad.com/fourier/

3) Interferenz von Wellen

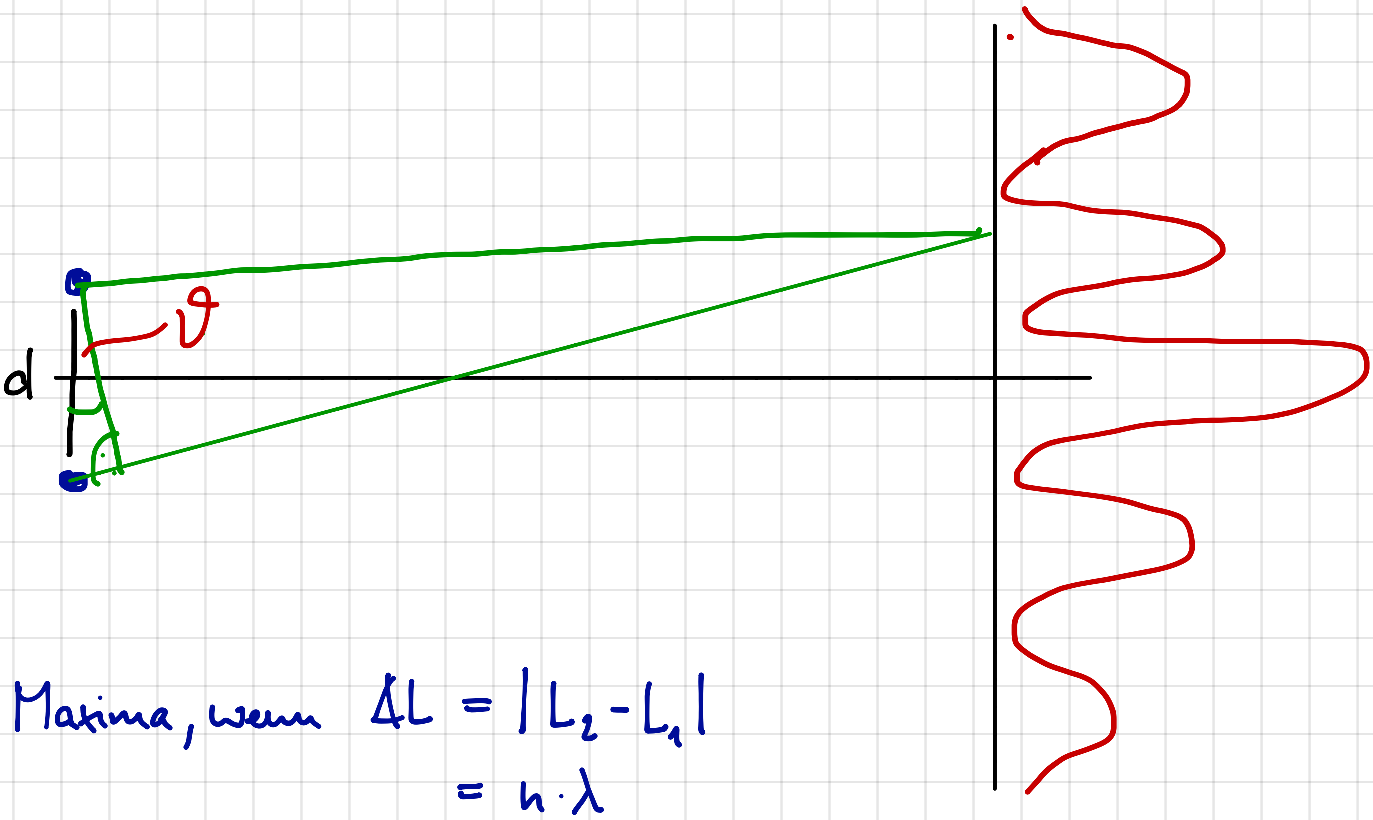


Positive Interferenz

für $L_1 = L_2 \pm n \cdot \lambda$

Negative Interferenz

für $L_1 = L_2 \pm \frac{2n+1}{2} \lambda$



Maxima, wenn $\Delta L = |L_2 - L_1|$

$= n \cdot \lambda$

$= d \cdot \sin \vartheta$

Anwendung: Bestimmung von λ