Feynman-Graphen: Schnellkurs

- Formalismus zur (störungstheoret.) Lösung der Dirac-Gleichung mit Wechselwirkung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = -e\gamma^\mu A_\mu(x)\Psi(x)$$

Ansatz analog zur Elektrostatik mit Hilfe der Green's-Funktion:

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\varrho(\vec{x})$$ (el-stat. Potential einer Lad. verteilung)

Punktladung: $\varrho(\vec{x}) = q\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \int \frac{\varrho(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x'$$

mit Hilfe der Green's-Funktion $G(\vec{x},\vec{x}')$, die

$$\vec{\nabla}^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$ erfüllt:

$$\phi(\vec{x}) = \int G(\vec{x},\vec{x}')\,\varrho(\vec{x}')\,d^3x'$$ ist ein Lösung,

denn $$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = \int \vec{\nabla}^2 G(\vec{x},\vec{x}')\,\varrho(\vec{x}')\,d^3x'$$

$$= -\int \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\,\varrho(\vec{x}')\,d^3x' = -\varrho(\vec{x}')$$

Aufgabe: Finde die Green's-Funktion!

einfach i.d. Elektrostatik:

$$\boxed{G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}}$$

Analoger Ansatz für die (inhom.) Dirac-Gleichung:

Suche Green's-Fkt $K(x,x')$, die

$$(i\not{\partial} - m)\, K(x,x') = \delta^4(x-x') \text{ erfüllt.}$$

Wenn wir $K(x,x')$ gefunden haben ist nämlich

$$\circledast \qquad \Psi(x) = -e\int K(x,x')\not{A}(x')\Psi(x')\, d^4x'$$

eine Lösung der Dirac-Gleichung.

$$\left((i\not{\partial} - m)\Psi = -e\int \delta^4(x-x')\not{A}(x')\Psi(x')\, d^4x' = -e\not{A}\Psi \right)$$

$\circledast$ ist hier keine Lösung, weil die rechte Seite Ψ enthält, aber $\circledast$ kann iterativ gelöst werden:

wenn $\phi(x)$ eine Lösung der homogenen (freien) Dirac-Gl ist, ist auch

$$\Psi(x) = \phi(x) - \underbrace{e\int K(x,x')\not{A}(x')\Psi(x')\, d^4x'}_{\text{kleine "Störung" von } \phi}$$

eine Lösung.

(weil $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$)

deshalb kann man im Integral ψ durch ϕ ersetzen:

$$\psi^{(1)}(x) = \phi(x) - e \int d^4x' \, K(x-x') \, \not{A}(x') \, \underline{\phi(x')}$$

(Näherung 1. Ordnung) usw.

Berechnung der Green's-Fkt. K

bilde Fourier-Transformierte von K

$$K(x-x') = (2\pi)^{-4} \int d^4p \, \tilde{K}(p) \, e^{-ip(x-x')}$$

$$\Rightarrow \quad (i\not{\partial} - m) K(x-x') = (2\pi)^{-4} \int d^4p \, (\not{p} - m) \tilde{K}(p) \, e^{-ip(x-x')}$$

$$= \delta^4(x-x') \qquad = \underbrace{(2\pi)^{-4} \int d^4p \, e^{-ip(x-x')}}_{\text{Def. der } \delta\text{-Funktion}}$$

Vergleich der Integranden $\Rightarrow$ $\boxed{(\not{p} - m) \tilde{K}(p) = 1}$ (Einheits-matrix)

$$\Rightarrow \quad (\not{p} + m)(\not{p} - m) \tilde{K}(p) = (\not{p} + m)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{K}(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}}$$

"Elektron-Propagator"

(F.T. der Green's-Fkt.)

nur definiert für virtuelle ($p^2 \neq m^2$)-Elektronen.

Green's-Fkt, bzw. Propagator beschreiben zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion. Es gilt (hier ohne Beweis)

$$i\int d^3x'\, K(x-x')\,\gamma^0\,\phi(\vec{x}',t') = \begin{cases} \phi(\vec{x},t) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

und $$i\int d^3x'\, K(x-x')\,\bar{\Phi}\gamma^0 = \begin{cases} 0 & t > t' \\ \bar{\Phi}(\vec{x},t) & t < t' \end{cases}$$

Photon-Propagator:

analog: suche Lösung der Wellengleichung für A^μ:

$$\Box A^\mu(x) = e J^\mu(x) \qquad eJ^\mu : \text{Strom}$$

[Lorentz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$]

Green's-Fkt: $\quad \Box D^{\mu\nu}(x-x') = g^{\mu\nu}\delta^4(x-x')$

$$\Rightarrow \quad A^\mu(x) = e\int d^4x'\, D^{\mu\nu}(x-x')\, J_\nu(x') \quad \text{, denn}$$

$$\Box A^\mu(x) = e\int d^4x'\, \Box D^{\mu\nu}(x-x')\, J_\nu(x') = e J^\mu(x) \quad \checkmark$$

Fouriertransformierte:

$$D^{\mu\nu}(x-x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, \tilde{D}^{\mu\nu}(q)\, e^{-iq(x-x')}$$

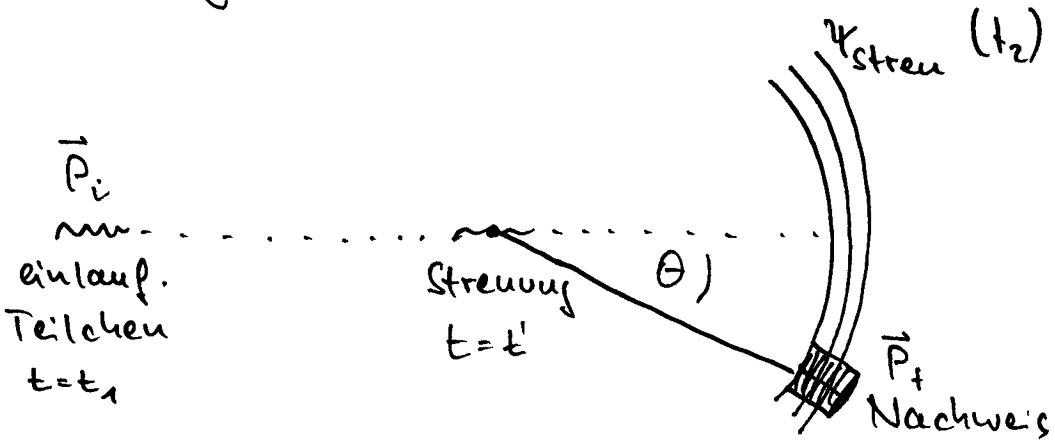
$$\Rightarrow \Box D^{\mu\nu}(x-x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, \tilde{D}^{\mu\nu}(q)\,(-q^2)\, e^{-iq(x-x')}$$

$$= g^{\mu\nu}\delta^4(x-x')$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{D}^{\mu\nu}(q)\,(-q^2) = g^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{D}^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2\,(+i\varepsilon)}} \qquad \text{Photon-Propagator}$$

Streuung an einem Potential



von Ψ_{streu} wird nur der Anteil mit Impuls $\vec{p}_f$ unter dem Winkel θ gemessen. $\Rightarrow$ Projiziere ϕ_f (eb.W.) heraus!

Streu-Matrix~~element~~: $\quad \Psi_{\text{streu}} = S\,\Phi_i \qquad$ Φ_i: ebene einlauf. Welle
S: "S-Matrix"

1. Ordnung: $\Psi_{\text{streu}}(x_2) = \phi_i(x_2) - e\int d^4x'\, K(x-x')\,\not{A}(x')\,\phi_i(x')$

Matrixelement: Überlapp zwischen Streuwelle und ϕ_f ~~einlauf. Welle~~:

$$S_{fi} = \int d^3x_2 \, \phi_f^+(x_2) \Psi_{Streu}(x_2)$$

$$= \int d^3x_2 \, \phi_f^+(x_2) \, S \, \phi_i(x_2)$$

$$= 2E_i \delta_{fi} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + \dots$$

$$S_{fi}^{(1)} = -e \int d^4x' \underbrace{\int d^3x_2 \, \phi_{f}^+(x_2) \, K(x_2 - x')}_{-i \bar{\phi}_f(x')} \not{A}(x') \, \phi_i(x')$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{fi}^{(1)} = i \cdot e \int d^4x' \, \bar{\phi}_f(x') \not{A}(x') \phi_i(x')}$$

<u>Beispiel: Streuung am ortsfesten Potential (schwerer Kern)</u>

$$A^0 = \frac{Ze}{4\pi |\vec{x}|} \, , \quad \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \not{A} = \gamma^0 \frac{Ze}{4\pi |\vec{x}|}$$

$$\phi_i(x) = u(p_i) e^{-ip_i x} \qquad \left(u(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \varphi \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow S_{fi} = i e^2 Z \, \bar{u}_f \gamma^0 u_i \underbrace{\int d^3x \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} e^{-i \vec{q} \cdot \vec{x}}}_{\text{Fourier-Trf.}} \underbrace{\int dt \, e^{i(E_f - E_i)t}}_{2\pi \delta(E_f - E_i)}$$

mit $\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

$\frac{1}{q^2}$ = Fourier-Trf. der Ladungsverteil. (= Formfaktor)

Streuung am Proton (punktförm.)

$$e + p \to e + p$$

Unterschied zu Str. am festen Potential: p erfährt Rückstoß $\Rightarrow \vec{A} \neq 0$. $\Rightarrow$ Berechne A^μ aus dem (Übergangs-) Strom des Protons:

$$e J^\mu(x) = e \overline{\Psi}_f(x) \gamma^\mu \Psi_i(x)$$

Dann ist $A^\mu(x) = e \int d^4x' \, D^{\mu\nu}(x-x') \, J_\nu(x')$

$$= e \cdot \int d^4x' \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} e^{i(p_4 - p_2 + q)x'} e^{iqx} \, \bar{u}(p_4) \gamma_\nu u(p_2)$$

Integral über x' $\Rightarrow \delta^4(p_4 - p_2 + q)$

$$\Rightarrow A^\mu(x) = e \int d^4q \, \delta^4(p_4 - p_2 + q) \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} e^{-iqx} \, \bar{u}(p_4) \gamma_\nu u(p_2)$$

Matrixelement (wie bei Streuung am festen Potential):

$$S_{fi} = ie \int d^4x \, \overline{\Phi}_f(x) \not{A}(x) \Phi_i(x)$$

$$= ie^2 \int d^4q \, \delta^4(p_4 - p_2 + q) \, \delta^4(p_3 - p_1 + q) (2\pi)^4 \cdot$$

$$\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \bar{u}(p_4) \gamma_\nu u(p_2)$$

Grafische Darstellung