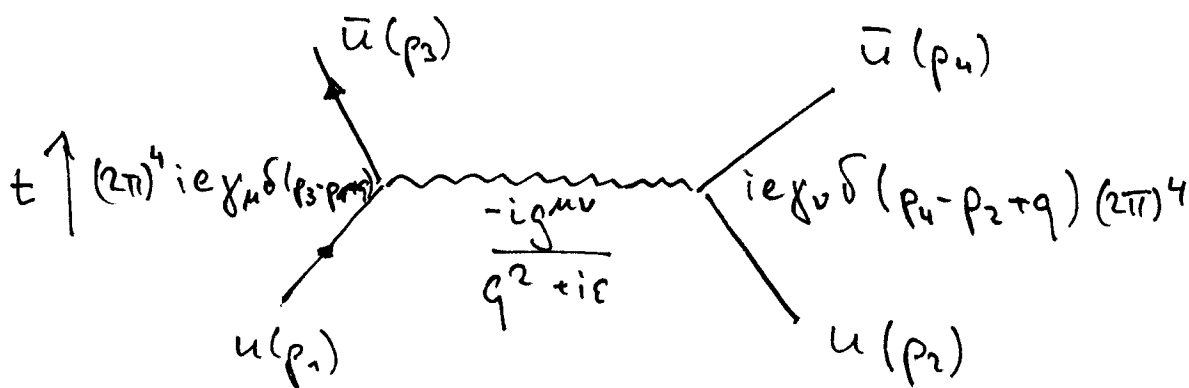


Vom Matrixelement zum Wirkungsquerschnitt

Wir hätten für $e+p \rightarrow e+p$ (oder $e+\mu \rightarrow e+\mu$):

$$S_{fi}^{(1)} = ie^2 \int d^4q \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + q) \delta^{(4)}(p_3 - p_1 - q) (2\pi)^4 \cdot$$

$$\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \cdot \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_4) \gamma_\nu u(p_2)$$



- Faktoren i an Vertices und im Propagator sind Konventionen
(nicht wichtig für Diagramme führender Ordnung)

Integration über q :

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p_3 - p_1 - q) (2\pi)^4 \delta(p_4 - p_2 + q) = (2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$$

Feynmanregeln

1) einlauf. (auslauf.) Fermion: $u(p)$ ($\bar{u}(p)$)

einlauf. (auslauf.) Antifermion: $\bar{v}(p)$ ($v(p)$) γ

einlauf. (auslauf.) Photon: $\epsilon_\mu(k)$ ($\epsilon^*(k)$)

virtuelles Photon: $\frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$

virtuelles Elektron: $i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

Lepton-Photon-Vertex: $i(\pm e)(2\pi)^4 \cdot \delta(p_f - p_i - q) \gamma_\mu$

2) integriere über $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$

3) streiche resultierende δ -Fkt., bilde $\epsilon \rightarrow 0$, kile durch $(2\pi)^4$

4) was übrig bleibt ist $\mathcal{M}$ "Matrixelement"

mit $S_{fi} = \mathcal{M} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$

Also nochmal für $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$:

$$\mathcal{M} = -ie^2 \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \cdot \frac{1}{q^2} \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2)$$

Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma \sim \frac{|S_{fi}|^2}{VT} \quad (\text{Übergangswahrscheinlichkeit pro Volumen und Zeit})$$

$$= |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$$

⇒ Berechne $|\mathcal{M}|^2$,

meistens unpolarisierte Strahlen/Targets und Polarisation im Endzustand beobachtet:

⇒ Mitteln über Spins im Anfangszustand

⇒ Summieren über Spins im Endzustand:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \left(\frac{1}{4}\right) \sum_{s_1, s_1} \sum_{s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2_{(s_1, s_2, s_3, s_4)}$$

$$\frac{\uparrow\uparrow + \downarrow\downarrow + \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow}{4} \leftarrow \text{Anfangsspins}$$

Wir schreiben:

$$|\mathcal{M}|^2_{s_1, s_2, s_3, s_4} \equiv \mathcal{M}^*_{s_1, \dots} \mathcal{M}_{s_1, \dots}$$

$$\text{und } |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \sum_{s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 L_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$$

$$\text{mit } L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_3} \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \underline{u(p_1)} \gamma_\nu u(p_3)$$

$$\text{und } M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_2, s_4} \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2) \bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(p_4)$$

Berechnung von $L_{\mu\nu}$: Konzept: Rückführen auf Spur einer Matrix

$$\textcircled{1} \quad u(p_1) \bar{u}(p_1) \text{ ist eine Matrix: } \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{Es gilt: } \boxed{\sum_{s_1} u(p_1) \bar{u}(p_1) = (\not{p}_1 + m)}$$

explizit nachrechnen

$\Rightarrow$ Schrüfer S.55

$$\textcircled{2} \quad L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_1 s_3} \bar{u}_3 \underbrace{\gamma_\mu u_1 \bar{u}_1 \gamma_\nu u_3}_{\text{Matrix } \tilde{A}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s_3} \bar{u}_3 \underbrace{\gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu u_3}_{\text{Matrix } A \text{ (im Spinorraum!)}} \quad \text{in Komponenten:}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^4 \left\{ \sum_{s_3} (\bar{u}_3)_j A_{jk} (u_3)_k \right\} \quad \text{umformieren (alles Zahlen)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^4 \left\{ A_{jk} \sum_{s_3} (\bar{u}_3)_j (u_3)_k \right\}$$

↔

$$= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^4 \left\{ A_{jk} \underbrace{\sum_{s_3} (u_3)_k (\bar{u}_3)_j}_{(\not{p}_3 + m)_{kj}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j B_{jj} = \frac{1}{2} \text{Spur } B \quad \text{mit } B = A \cdot (\not{p}_3 + m)$$

also:

$$\boxed{L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Spur} (\gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu (\not{p}_3 + m))}$$

$$\text{und } M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Spur} (\gamma^\mu (\not{p}_2 + m) \gamma^\nu (\not{p}_4 + m))$$

③ Sätze über Spuren:

$$1.) \text{Spur} (1) = 4$$

$$2.) \text{Spur} (\text{ungerade Zahl von } \gamma^\mu) = 0$$

$$3.) \text{Spur} (\not{a} \not{b}) = 4ab$$

$$4.) \text{Spur} (\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4(ab)(cd) + 4(ad)(bc) - 4(ac)(bd)$$

④ Trick: schreibe γ^0 als $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$ mit $a_\mu = (1, 0, 0, 0)$
 γ^1 " $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$ " $a_\mu = (0, 1, 0, 0)$
 usw...

⑤ Dann wird

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Spur} (\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3) + \frac{1}{2} \text{Spur} (m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu)$$

$$= 2 [p_{1\mu} p_{3\mu} + p_{1\nu} p_{3\nu} - (p_1 \cdot p_3) g_{\mu\nu}] + 2m^2 g_{\mu\nu}$$

$$\text{und } M^{\mu\nu} = 2 [p_2^\mu p_4^\nu + p_2^\nu p_4^\mu - (p_2 \cdot p_4) g^{\mu\nu}] + 2M^2 g^{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$

$$L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = 4 [2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + q^2(q^2 + (p_1 \cdot p_3) + (p_2 \cdot p_4))]]$$

$$\text{mit } (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 p_2 + M^2 =: s \quad (m \equiv 0)$$

$$\Rightarrow 2p_1 p_2 = \tilde{s} := s - M^2$$

$$2p_3 p_4 = \tilde{s}$$

$$2p_1 p_3 = Q^2 \quad (Q^2 := -q^2)$$

$$2p_2 p_4 = Q^2 + 2M^2$$

$$2p_1 p_4 = 2p_2 p_3 = \tilde{s} - Q^2$$

$$\Rightarrow L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = 4 \tilde{s}^2 \left[1 - \frac{Q^2}{\tilde{s}} \left(1 + \frac{M^2}{\tilde{s}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{\tilde{s}} \right)^2 \right]$$

Für die Reaktion $a + b \rightarrow c + d$
im Schwerpunktsystem gilt:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2 W^2} \cdot \frac{p'}{p} \overline{|M|^2}}$$

p' = Impulsbetrag der auslaufenden Teilchen
($p' := |\vec{p}_c| = |\vec{p}_d|$)

W = Schwerpunktsenergie

$$\sqrt{s} = \sqrt{(p_a + p_b)^2} = \sqrt{(p_c + p_d)^2}$$

Damit wird für den Prozess $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} \left[1 - \frac{Q^2}{\tilde{s}} \left(1 + \frac{M^2}{\tilde{s}} \right) + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{s} \right]$$

Nochmal mit Mandelstamvariablen:

$$s := (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \approx 2p_1 p_2 = 2p_3 p_4 \quad (m=M=0)$$

$$t := (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 \approx -2p_1 p_3 = -2p_2 p_4$$

$$u := (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \approx -2p_1 p_4 = -2p_3 p_2$$

Dann wird $\mathcal{M} = \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$

$$\boxed{e^2 = 4\pi\alpha}$$

$$= \frac{16\pi^2}{t^2} \cdot 4 \left[2(p_1 p_2)(p_3 p_4) + 2(p_1 p_4)(p_2 p_3) + q^2(q^2 + p_1 p_3 + p_2 p_4) \right]$$

$$= \frac{16\pi^2}{t^2} \cdot 2 \left[s^2 + u^2 + 2t \left(t - \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{M} = \frac{8\pi\alpha^2}{t^2} \cdot \frac{s^2 + u^2}{t^2}}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{s} \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} \right)}$$