

5 Induktion

5.1 Statische und zeitlich veränderliche Felder

Bisher haben wir elektrische und magnetische Felder betrachtet, die durch zeitlich konstante Ladungs- und Stromverteilungen

$$\partial_t \varrho = 0, \quad \nabla \vec{j} = 0$$

entstehen. Für diese gelten die Gleichungen

$$\nabla \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \quad \oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (5.1) \quad \text{Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad (5.2) \quad E\text{-Felder sind wirbelfrei}$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \oint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (5.3) \quad B\text{-Felder haben keine Quellen}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I \quad (5.4) \quad \text{Ströme erzeugen } B\text{-Felder mit geschlossenen Feldlinien}$$

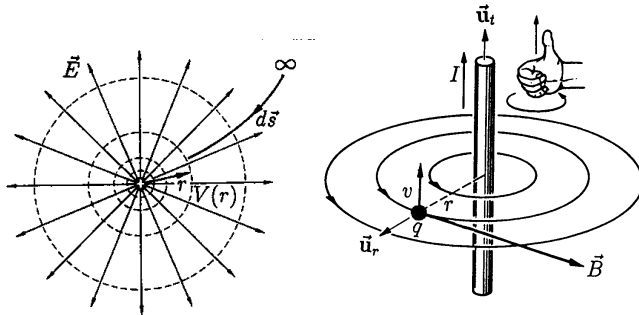


Abb. 5.1 Richtung des elektrischen und magnetischen Feldes.

Die Richtungen der Felder entsprechen den obigen Ableitungen, wenn man berücksichtigt, dass

$$\nabla r = \vec{e}_r, \quad \nabla \vec{r} = 3, \quad \nabla \times \vec{r} = 0$$

Zusammen mit den Gleichungen für Lorentzkraft und Strom

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad \vec{j} = \sigma_{el} \vec{E}$$

ergibt dies ein komplettes Bild statischer elektrischer und magnetischer Effekte.

Einige dieser Gleichungen sind jedoch nicht mehr gültig, wenn sich Ladungsverteilungen, Stromverteilungen oder Felder zeitlich ändern. So wird z.B. der Strom beim Aufladen eines Kondensators ein Magnetfeld erzeugen, das den Ladevorgang selber beeinflusst.

Praktisch alle technischen Anwendungen beruhen auf zeitlich veränderlichen Vorgängen. Nicht zuletzt sind die gebräuchlichsten Energiequellen Wechselstromquellen. Der wichtigste Prozess mit veränderlichen Feldern ist die Induktion von elektrischen Feldern durch Magnetfelder.

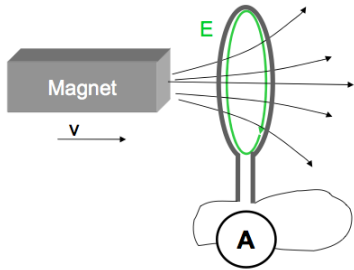


Abb. 5.2 Die Änderung des B -Feldes erzeugt einen Strom im Ring.

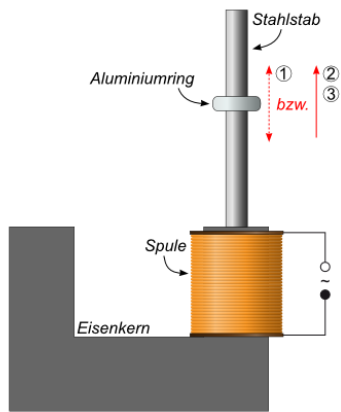


Abb. 5.3 Induktions-Kanone.

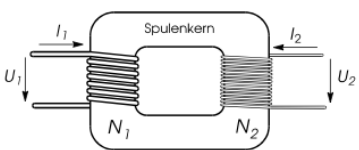


Abb. 5.4 Transformator mit Eisenkern.

Versuche: Ein unmagnetischer, stromloser, kreisförmiger Leiter wird von einem Magneten abgestoßen, wenn man diesen schnell nähert. Dies gilt sowohl für Annäherung mit dem Nordpol als auch mit dem Südpol. Dies kann so interpretiert werden, dass im Leiter ein kreisförmiger Strom induziert wird, der seinerseits ein Magnetfeld erzeugt. Ist dieses Magnetfeld dem ersten entgegengerichtet stoßen sich die beiden Magnete ab. Diesen Effekt kann man sich auch bei der Induktionskanone zunutze machen. Benutzt man einen Ring mit einem Schlitz so entsteht keine messbare Abstoßung. Offenbar wird der Strom im Ring über den ganzen Radius induziert.

Verbindet man zwei Spulen so, dass die Magnetfeldlinien immer beide Spulen durchlaufen, erzeugt eine Stromänderung in der einen Spule eine Magnetfeldänderung, die wiederum in der anderen Spule eine Spannungsänderung induziert. Dies ist das Prinzip des Transformators. Die induzierte Spannung ist umso größer, je schneller die Magnetfeldänderung erfolgt.

Insgesamt zeigt sich, dass ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld ein elektrisches Feld erzeugt, das das Magnetfeld kreisförmig umgibt. Dieses ist für die Induktion von Strömen verantwortlich. Das E -Feld ist also nicht mehr wirbelfrei. Die elektrischen Feldlinien sind geschlossen und haben keinen Anfang und kein Ende.

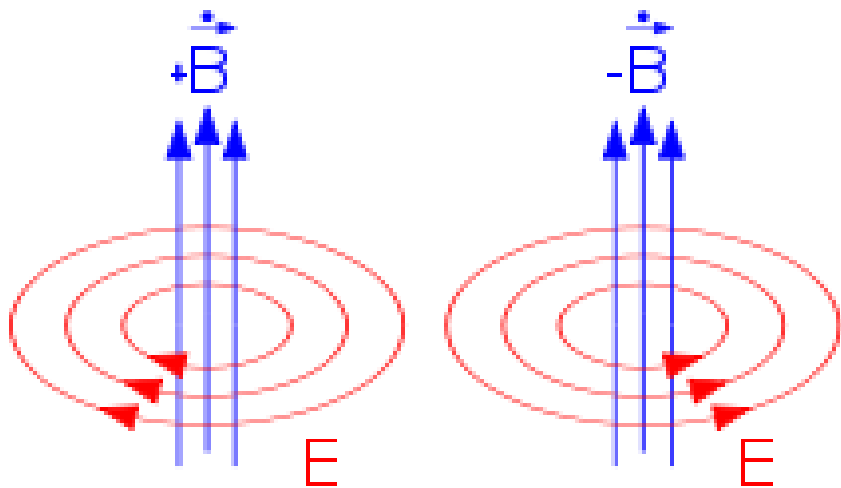


Abb. 5.5 Erzeugung von elektrischen Feldern durch Änderung des Magnetfelds.

5.2 Faraday'sches Induktionsgesetz

Wir betrachten einen U-förmigen Leiter, der von einem verschiebbaren Draht abgeschlossen wird. Bewegt sich der Draht mit Geschwindigkeit $\vec{v}$, so wird durch die Lorentzkraft eine Kraft auf die Ladungsträger ausgeübt. Nach den gleichen Überlegungen wie bei der Hall-Spannung entspricht dies einem äquivalenten elektrischen Feld $E = vB$ entlang des beweglichen Drahts. Die "induzierte" Spannungsdifferenz ist bei einer Länge s gegeben durch

$$U_{ind} = \int \vec{E} d\vec{s} = Es = -vsB$$

Die Richtung des $\vec{B}$ -Feldes gibt nach der Rechten-Hand-Regel die Richtung des Weges $\vec{s}$ vor, der damit entgegengesetzt zum $\vec{E}$ -Feld ist. Dies erklärt das Minus-Zeichen. Diese Spannung erzeugt einen Strom in der geschlossenen Leiterschleife, wirkt also wie eine Spannungsquelle.

In Verallgemeinerung dieses Spezialfalls lässt sich das Produkt vs auf der rechten Seite dieser Gleichung auch interpretieren als eine Änderung der Fläche $A = xs$ der Leiterschleife (s ist konstant)

$$\partial_t A = \partial_t(xs) = vs$$

Wenn B ebenfalls konstant ist, kann man die rechte Seite mit der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses identifizieren

$$\partial_t \phi_m = \partial_t \iint \vec{B} d\vec{A} = \partial_t(B \iint dA) = \partial_t(AB) = (\partial_t A) B = vsB$$

so dass

$$U_{ind} = -\partial_t \iint \vec{B} d\vec{A} \quad (5.5)$$

Auch die linke Seite der Gleichung lässt sich verallgemeinern. Da der U-förmige Leiter ruht, wird dort keine Spannung induziert, so dass man das Linienintegral auf einen geschlossenen Weg ausweiten kann,

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\partial_t \iint \vec{B} d\vec{A} \quad (5.6)$$

Dabei sind die Richtung des Integrationswegs $d\vec{s}$ und des Flächenvektors $d\vec{A}$ über die Rechte-Hand-Regel miteinander verbunden. Wendet man den Stokes'schen Integralsatz auf die linke Seite an

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \iint (\nabla \times \vec{E}) d\vec{A}$$

so folgt für beliebige Flächen

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (5.7)$$

Diese neuen Maxwellgleichungen ersetzen die Gleichung $\nabla \times \vec{E} = 0$ und $\oint \vec{E} d\vec{s} = 0$ der Elektrostatik. Sie beschreiben die Entstehung von elektrischen Wirbelfeldern bei zeitlicher Änderung des Magnetfeldes.

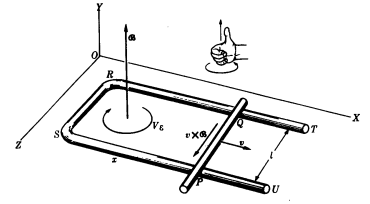


Abb. 5.6 In einem Magnetfeld wird in einem Draht mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ ein Strom induziert.

Faraday'sches Induktionsgesetz in integraler Form

Faraday'sches Induktionsgesetz in differentieller Form

Lenz'sche Regel und Energieerhaltung

5.2.1 Lenz'sche Regel

Das Minuszeichen in Gleichung 5.6 und 5.7 beinhaltet die Lenz'sche Regel:

- Die durch Induktion entstehenden Ströme und Felder sind immer entgegengesetzt zu ihrer Ursache.

Dies lässt sich auch als Energieerhaltung interpretieren. Steigt der magnetische Fluß ϕ_m , so sollte er keine Wirkung entfalten, die zu einer erneuten Steigerung und damit sukzessive zu einem beliebig großen Magnetfeld führt.

Beispiel: Gegeben sei ein Metallring mit Flächenvektor $\vec{A}$ im Feld $\vec{B}$ eines Stabmagneten. Wir definieren $\vec{A}$ so, dass $\vec{A}$ in Richtung von $\vec{B}$ zeigt. Wird der Magnet weggezogen, so verringert sich der magnetische Fluß ϕ_m durch die Ebene $\vec{A}$ des Rings, also $\partial_t \phi_m < 0$. Wegen des Minuszeichens in Gleichung 5.6 ist damit $\oint \vec{E} d\vec{s} > 0$, so dass der im Ring induzierte Strom $I_{ind} = U_{ind}/R$ entsprechend der Rechten-Hand-Regel zu $\vec{A}$ orientiert ist. Dieser Strom erzeugt ein magnetisches Moment $\vec{m}$, das in Richtung von $\vec{A}$ und damit auch $\vec{B}$ zeigt. Damit ergibt sich, bei Verringerung des Feldes $\vec{B}$ des Stabmagneten in der Ebene des Rings, ein neues Magnetfeld in Richtung von $\vec{B}$:

- $\vec{B}$ wird schwächer $\Rightarrow \vec{B}_{ind}$ zeigt parallel zu $\vec{B}$.
- $\vec{B}$ wird stärker $\Rightarrow \vec{B}_{ind}$ zeigt entgegengesetzt zu $\vec{B}$.

Im ersten Fall werden also entgegengesetzte Pole von $\vec{B}$ und $\vec{m}$ zueinander zeigen und es wirkt eine anziehende Kraft.

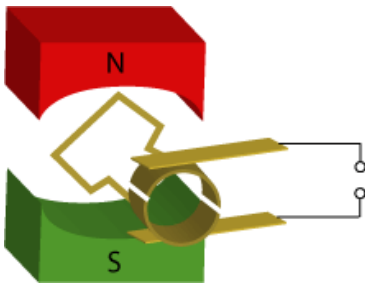


Abb. 5.7 Erzeugung einer Spannung durch das Drehen einer Leiterschleife im Magnetfeld.

5.2.2 Stromerzeugung

Es gibt zahlreiche Anwendungen des Induktionsgesetzes. So wird zum Beispiel beim Lesen von Kreditkarten ein magnetisierter Streifen an einer Spule vorbeigeführt und die induzierte Spannung gemessen.

Bei weitem die wichtigste Anwendung ist jedoch die Erzeugung von Strom durch das Drehen einer Leiterschleife in einem permanenten Magnetfeld. In einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ gilt für eine konstante Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung

$$\phi_m = \iint \vec{B} d\vec{A} = \vec{B} \vec{A} = B A \cos \omega t$$

Die induzierte Spannung

$$U_{ind} = -\partial_t \phi_m = \omega B A \sin \omega t \quad (5.8)$$

ist also proportional zur Drehgeschwindigkeit. Schließt man den Stromkreis über einen Verbraucherwiderstand, so ist die zur Drehung erforderliche mechanische Energie abhängig vom induzierten

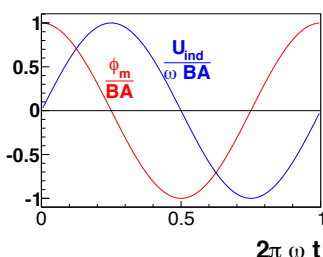


Abb. 5.8 Magnetischer Fluß und induzierte Spannung in einer drehenden Leiterschleife.

Strom und damit vom Wert des Widerstands. Zu Zeiten maximaler Änderungsrate von ϕ_m ist die induzierte Spannung maximal.

Der Strom in der Leiterschleife bewirkt selber ebenfalls ein Magnetfeld (Dipolfeld), das mit dem äußeren Magnetfeld wechselwirkt. Die dadurch entstehenden Kräfte bewirken die Übertragung von mechanischer Energie in elektrische Energie.

5.2.3 Wirbelströme

Bei der Bewegung ausgedehnter Metallkörper in einem äußeren Magnetfeld werden im Metall durch Induktion Ströme induziert, die in den inhomogenen Randbereichen wirbelförmig verlaufen. Das durch den Strom entstehende magnetische Moment wechselwirkt mit dem äußeren Magnetfeld. Entsprechend der Lenz'schen Regel wirkt diese Kraft entgegen der Bewegungsrichtung. Die Bewegungsenergie des Metalls wird durch den Ohm'schen Widerstand in Wärme umgewandelt. Dieser Effekt wird zum Beispiel bei Zügen als Bremse benutzt.

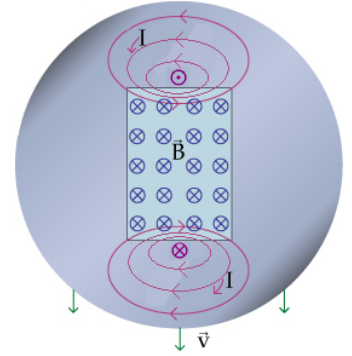


Abb. 5.9 Erzeugung von Wirbelströmen (Wikipedia).

5.3 Selbst-Induktivität

Für jede Anordnung von Leitern und Strömen gilt, dass die Ströme Magnetfelder erzeugen. Ändert sich der Strom, so ändert sich auch das Magnetfeld, und damit wird nach dem Induktionsgesetz eine Spannung induziert,

$$\partial_t I \quad \Rightarrow \quad \partial_t B \quad \Rightarrow \quad U_{ind}$$

Man definiert daher die Selbstinduktivität L über die Gleichung

$$\boxed{U_{ind} = -L \partial_t I} \quad (5.9)$$

Dabei wird L nur von der Geometrie und den Materialeigenschaften der Leiter abhängen und damit im Allgemeinen konstant sein. Die Einheit der Induktivität ist

$$[L] = 1 \text{ Henry} = 1 H = \frac{V s}{A}$$

Beispiel: Spule

Bei einer langen Spule mit N Windungen, Länge l und Windungsdichte $n = N/l$ ist das Magnetfeld

$$B = \mu_0 \mu_r n I$$

so dass

$$\partial_t B = \mu_0 \mu_r n \partial_t I$$

Die in der Spule selber induzierte Spannung ist bei N Windungen ist insgesamt

$$U_{ind} = \oint \vec{E} d\vec{s} = -N \vec{A} \partial_t \vec{B} = -n \underbrace{l A}_{=V} \partial_t B = -\underbrace{n V \mu_0 \mu_r n}_{=L} \partial_t I$$

5.3 Selbst-Induktivität

so dass mit dem Volumen $V = A l$ für die Induktivität folgt:

$$\boxed{L = \mu_0 \mu_r n^2 V} \quad (5.10)$$

Anschaulich ergibt sich der Faktor n^2 , da die nl Windungen ein Magnetfeld erzeugen, dass auf die nl Windungen wirkt. Beispielsweise ist bei $n = 10\text{cm}^{-1}$ und $V = 10\text{cm}^3$ und $\mu_r = 1000$ die Induktivität $L \approx 12\text{mH}$.